NÚMEROS RACIONALES Q

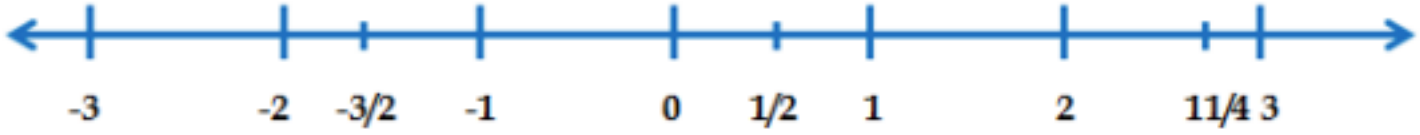
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROFESOR ANGEL OTEIZA SOTO

LOS RACIONALES Q

- Definición: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

El conjunto de los números racionales es ordenado y posee infinitos elementos. Este conjunto abarca a todos los anteriores y se le agregan aquellos elementos que se pueden expresar en forma de división entre dos números enteros cualesquiera, con la única restricción de que el divisor o denominador tiene que ser distinto de cero. Por lo tanto los números racionales son todos aquellos que pueden ser representados por medio de fracciones. El conjunto se designa por Q y se puede representar sobre la recta numérica como se muestra a continuación:



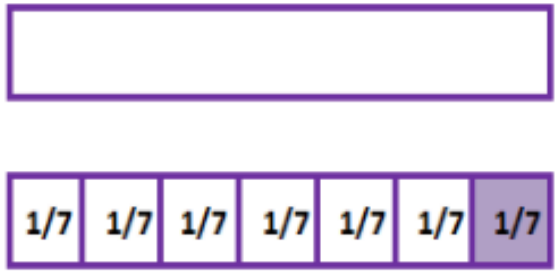
Q ES DENSO

$$\mathbb{Q} = \{-\infty, ..., -3, ..., \frac{-8}{3}, ..., -2, ..., \frac{-6}{4}, ..., -1, ..., 0, ..., \frac{1}{2}, ..., 1, ..., \infty\}$$

- Cabe destacar que este conjunto Q tiene la propiedad de ser denso, es decir, siempre entre dos racionales cualesquiera, encontraremos un tercero entre medio, por muy próximos que estén los números entre sí.
- Entre dos números racionales hay **infinitos** números racionales

FRACCIONES ELEMENTO DE Q

En nuestro diario vivir utilizamos expresiones como “un cuarto para las 8”, “me queda la mitad” o ”los goles son válidos desde mitad de cancha”. Dentro de éstas expresiones estamos utilizando fracciones ya que hacen alusión a dividir una totalidad en cierta cantidad de partes iguales. En base a esto, una fracción se puede definir como la división de dos números cualesquiera, a/b, donde a (numerador) indica el número de partes iguales que se han tomado y b (denominador distinto de 0) indica el número de partes iguales en la que se ha divido un entero. Por lo tanto, si tenemos $\frac{1}{7}$ significa que dividimos un entero en 7 partes iguales y de esas partes tomamos una.



$$\frac{1}{7}$$

Numerador

Denominador

FRACCIÓN

Una fracción está compuesta por un **numerador** y un **denominador**.

- **Denominador** → Partes en que se divide la unidad.
- **Numerador** ⟶ Partes que tomamos de la unidad.

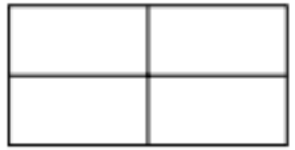
EJEMPLO

Fracción: $\frac{3}{4}$

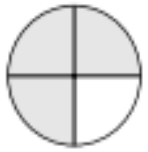
3 → NUMERADOR = 3

4 → DENOMINADOR = 4

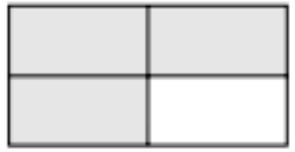
- **Denominador** → Dividimos la unidad en cuatro partes iguales.



- **Numerador** → Tomamos tres partes del total.



→ $\frac{3}{4}$



→ $\frac{3}{4}$

FORMAS DE REPRESENTACIÓN DE UNA FRACCIÓN

- Una fracción se puede representar de distintas formas:

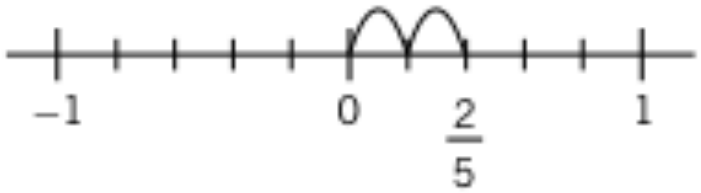
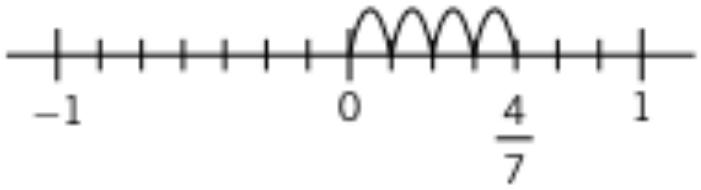
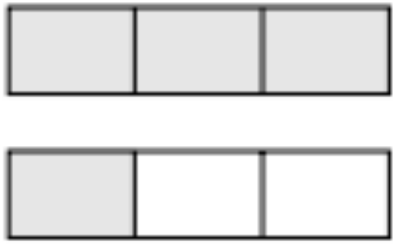
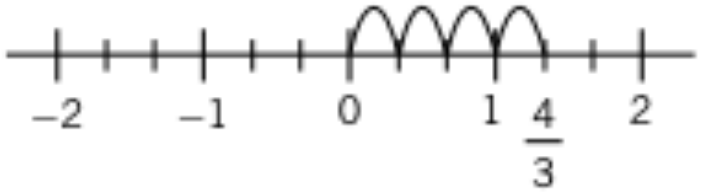
i. Representación escrita.

ii. Representación gráfica.

iii. Representación numérica.

iv. Representación en la recta numérica

EJEMPLO

REPRESENTACIÓN ESCRITA	REPRESENTACIÓN NUMÉRICA	REPRESENTACIÓN GRÁFICA	REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA
Dos quintos	$\frac{2}{5}$		
Cuatro séptimos	$\frac{4}{7}$		
Cuatro tercios	$\frac{4}{3}$		

TIPOS DE FRACCIONES

- Fracción Propia

Una fracción propia tiene el numerador menor que el denominador. Por ejemplo $\frac{2}{5}$

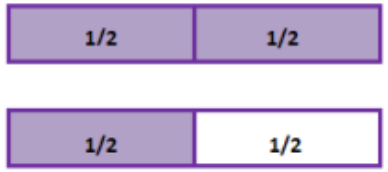
En general, la fracción $\frac{a}{b}$ es propia si |a| > |b|.

- Fracción Impropia

Una fracción impropia tiene el numerador mayor que el denominador. Por ejemplo $\frac{13}{8}$.

En general, la fracción $\frac{a}{b}$ es impropia si $|a| < |b|$.

Este tipo de fracciones se puede interpretar de la siguiente forma. Si tenemos $\frac{3}{2}$ significa que debemos tomar 3 veces $\frac{1}{2}$, esto lo conseguimos tomando dos partes de un entero dividido en dos y una parte de otro entero equivalente al primero.



$1\frac{1}{2}$

FRACCIÓN MIXTA

- Definición

Es aquella que se escribe con un entero y una fracción.

Ejemplo: $5\frac{1}{3}$

Para transformar una fracción impropia a un número mixto debemos seguir los siguientes pasos:

1. Dividir el numerador por el denominador.
2. Escribir el cociente de la división como un número entero.
3. Escribir el resto encima del denominador.

$$\frac{19}{7}$$

$$19 : 7 = 2$$

$$5$$

$$2\frac{5}{7}$$

Para transformar un número mixto a fracción debemos seguir los siguientes pasos:

1. Multiplicar la parte entera por el denominador.
2. Sumar el resultado al numerador
3. Escribir el resultado sobre el denominador.

$$2\frac{5}{7}$$

$$7 \cdot 2 = 14$$

$$14 + 5 = 19$$

$$\frac{19}{7}$$

FRACCIONES EQUIVALENTES

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** cuando el producto cruzado de numeradores y denominadores es igual.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

EJEMPLO

Las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ son equivalentes, ya que $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$.

AMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

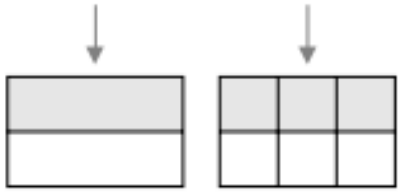
AMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

- Para obtener una fracción equivalente a otra fracción dada **multiplicamos** el numerador y el denominador de dicha fracción **por un número distinto de cero**. Este método se llama amplificación.
- Observa que podemos obtener tantas fracciones amplificadas como queramos.

EJEMPLO

Obtén una fracción equivalente y amplificada de $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} \qquad \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$



Las fracciones son equivalentes, es decir, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ representan el mismo número.

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

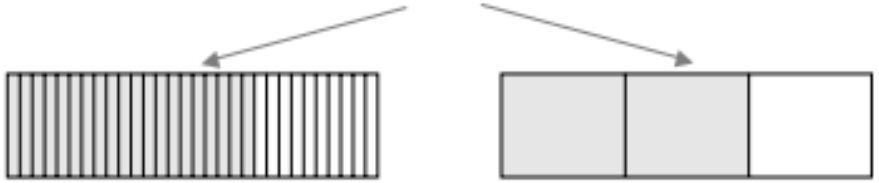
- **Simplificar** una fracción es encontrar otra fracción equivalente a ella dividiendo numerador y denominador por un factor común.
- Observa que el proceso, al contrario que en la amplificación, no se puede realizar indefinidamente. Se termina al encontrar una fracción que no se puede simplificar. Esta fracción se llama **fracción irreducible**.

EJEMPLO

Simplifica las siguientes fracciones.

$$\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}} = \frac{5:5}{10:5} = \frac{1}{2} \qquad \frac{5}{10} \text{ y } \frac{1}{2} \text{ son equivalentes}$$

$$\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{30}} = \frac{20:10}{30:10} = \frac{2}{3} \qquad \frac{20}{30} \text{ y } \frac{2}{3} \text{ son equivalentes}$$



TRANSFORMACIÓN DE FRACCIÓN A DECIMAL

- **<u>SE DIVIDE EL NUMERADOR POR EL DENOMINADOR</u>**
- SE ENCONTRARÁN TRES TIPOS DE DECIMAL:

i. DECIMAL FINITO EJ: 1.5

ii. DECIMAL INFINITO PERIÓDICO EJ: $2,\overline{7}$

iii. DECIMAL INFINITO SEMIPERIÓDICO EJ: $3,15\overline{45}$

- **De un número con decimales finitos a fracción**

  La fracción tendrá como numerador el número dado sin la coma, y por denominador, la unidad 1 seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga. Por ejemplo el número $8,74$ posee dos cifras decimales así que, $8,74 = \frac{874}{100}$ o el número $234,1$ posee una cifra decimal así que, $234,1 = \frac{2341}{10}$.

TRANSFORMACIÓN DE FRACCIÓN A DECIMAL

- **De un número con decimales periódicos a fracción**

  La fracción tendrá como numerador el número dado sin la coma, menos la parte entera, y por denominador, un número formado por tantos nueves como cifras tiene el período. Por ejemplo el número $2,\overline{45}$ tiene dos cifras periódicas, por lo tanto, $2,\overline{45} = \dfrac{245-2}{99} = \dfrac{243}{99}$ o el número $31,\overline{1}$ tiene una cifra periódica así que, $31,\overline{1} = \dfrac{311-31}{9} = \dfrac{280}{9}$.

- **De un número con decimales semiperiódicos a fracción**

  La fracción tendrá como numerador el número dado sin la coma, menos la parte entera seguida de las cifras decimales no periódicas, y por denominador, un numero formado por tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal no periódica. Por ejemplo el número $1,63\overline{192}$ tiene 3 cifras periódicas y 2 cifras en la parte decimal no periódicas, por lo tanto se escribirá como $1,63\overline{192} = \frac{163192 - 163}{99900} = \frac{163029}{99900}$ ó el número $37,2\overline{5}$ tiene 1 cifra periódica y 1 cifra en la parte decimal no periódica, por lo tanto se expresaría como $37,2\overline{5} = \frac{3725 - 372}{90} = \frac{3353}{90}$.

- ALMACENA TODA LA INFORMACIÓN

OPERATORIA SUMA Y RESTA

Al sumar o restar dos fracciones obtenemos una fracción cuyo numerador corresponde a la suma o resta de dos enteros y cuyo denominador corresponde al máximo común divisor entre los denominadores iniciales. Por ejemplo

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{5} = \frac{5+12}{30} = \frac{17}{30}$$
$$\frac{-4}{3} - \frac{3}{2} = \frac{-8-9}{6} = \frac{-17}{6}$$
$$\frac{20}{13} + \frac{3}{13} = \frac{20+3}{13} = \frac{23}{13}$$

La adición o sustracción de racionales se define entonces se la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

En el caso de que los denominadores sean iguales, la expresión anterior se puede reducir a:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

EJEMPLO

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{12}{10}$$

MULTIPLICACIÓN

DIVISIÓN DE FRACCIONES

La división de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda fracción, y cuyo denominador es el producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

EJEMPLO

$$\frac{11}{2} : \frac{3}{5} = \frac{11 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{55}{6}$$

DIVISIÓN

OPERACIONES COMBINADAS

Recuerda que, cuando se realizan **operaciones combinadas**, es decir, sumas, restas, multiplicaciones y divisiones a la vez:

- Se hacen primero las **operaciones de los paréntesis**.
- Luego se resuelven las **multiplicaciones y divisiones**, de izquierda a derecha.
- Por último, se operan las **sumas y restas**, en el mismo orden.

EJEMPLO

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{4} : \frac{1}{5} - \frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \oplus \frac{3}{4} : \frac{1}{5} \ominus \frac{5}{4}$$

En este caso, la operación queda divida en tres BLOQUES.

$$\underset{A}{\boxed{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}} + \underset{B}{\boxed{\frac{3}{4} : \frac{1}{5}}} - \underset{C}{\boxed{\frac{5}{4}}}$$

Realizamos las operaciones de cada bloque antes de sumar o restar:

A: Hacemos la multiplicación.

B: Hacemos la división.

C: No se puede operar.

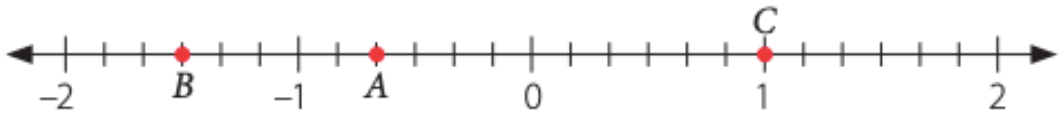
$$\boxed{\frac{15}{4}} + \boxed{\frac{15}{4}} - \boxed{\frac{5}{4}}$$

Ahora realizamos las sumas y las restas: Solución $= \frac{25}{4}$

OTRA FORMA DE SUMAR Y RESTAR

Ejemplo 1

La recta numérica está graduada en partes iguales.



¿Cuál es el resultado de la diferencia entre A y B aumentada en C?

Para responder la pregunta, puedes realizar lo siguiente:

PASO A PASO

1. $A = -\frac{4}{6}, B = -\frac{9}{6}, C = 1,$ → Determinas el número racional que representa cada letra.
2. $A - B + C = -\frac{4}{6} - \left(\frac{-9}{6}\right) + 1$ → Remplazas en la expresión.
3. $-\frac{4}{6} - \left(\frac{-9}{6}\right) + \frac{6}{6} = \frac{-4 + 9 + 6}{6} = \frac{11}{6}$ → Resuelves.

Respuesta: El resultado de $A - B + C$ es $\frac{11}{6} = 1{,}8\overline{3} = 1\frac{5}{6}$.

OTRO EJEMPLO DE SUMA Y RESTA

Ejemplo 2

Considera que $x = \frac{5}{7}$ y $z = 3,\overline{2}$. ¿Cuál es el resultado de la adición entre x y z?

Para responder la pregunta, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. $x + z = \frac{5}{7} + 3,\overline{2}$ → Remplazas en la expresión.
2. $x + z = \frac{5}{7} + \frac{29}{9}$ → Representas como una fracción: $3,\overline{2} = \frac{32 - 3}{9} = \frac{29}{9}$.
3. $x + z = \frac{248}{63}$ → Sumas las fracciones: $\frac{5}{7} + \frac{29}{9} = \frac{5 \cdot 9 + 29 \cdot 7}{7 \cdot 9} = \frac{248}{63}$.

Respuesta: El resultado de $x + z$ es $\frac{248}{63}$.

Ejemplo 3

Resuelve el siguiente problema.

De un *pendrive* de 16 Gb se utilizan 2,5 Gb en música y $1\frac{1}{4}$ Gb en documentos. ¿Cuánta memoria queda disponible?

Analiza los siguientes pasos que te ayudarán a resolver el problema.

PASO A PASO

1. A la capacidad del *pendrive* le restas la memoria utilizada: $16 - 2{,}5 - 1\frac{1}{4}$.
2. Puedes representar $1\frac{1}{4}$ con el número decimal 1,25 y luego resuelves:

$$16 - 2{,}5 - 1\frac{1}{4} = 13{,}5 - 1{,}25 = 12{,}25$$

Respuesta: Quedan disponibles 12,25 Gb.

EJEMPLO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS