Resumen de los Tipos de Funciones

Liceo Javiera Carrera

Departamento de Matemática

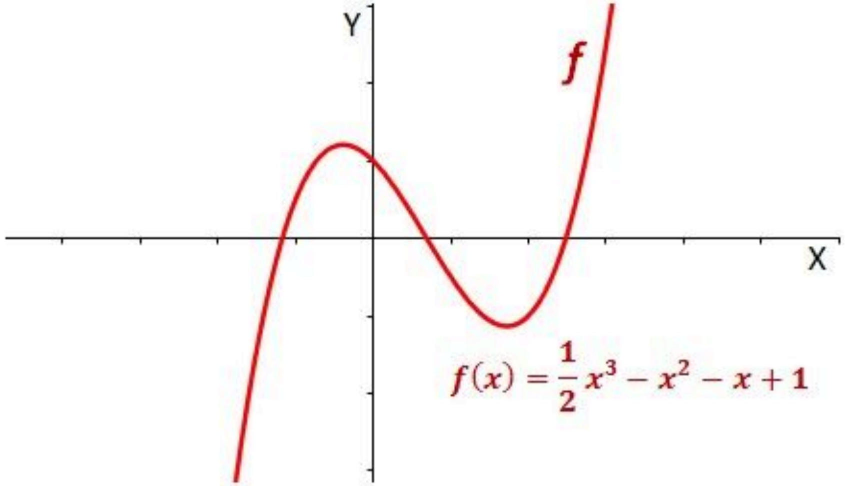
Asignatura – Límite, Derivada e Integral

Matemática Diferenciado

Función polinómica

Una **función polinómica** f es una función cuya expresión es un **polinomio** tal como:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$



El **dominio** de las funciones polinómicas son todos los **números reales**.

Las funciones polinómicas son **continuas** en todo su dominio.

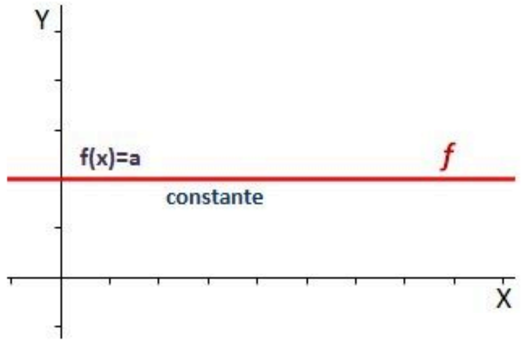
Se llama **grado** de una función polinómica al mayor exponente de sus términos. Por ejemplo, el polinomio de la función del gráfico de arriba es de grado 3.

Los diferentes a_i (a_0, a_1, ...a_n), son números reales llamados **coeficientes de un polinomio**.

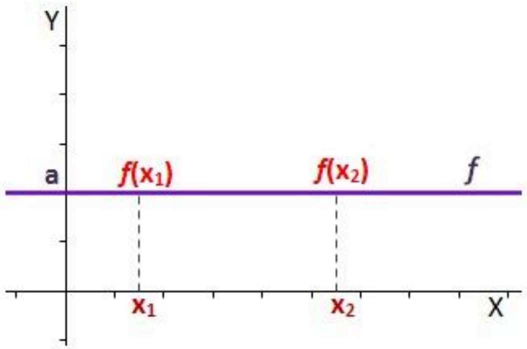
Función Constante

Una función f es **constante** si la variable dependiente y toma el mismo valor a para cualquier elemento del dominio (variable independiente x).

$$f(x) = a \quad \text{siendo a constante}$$



En términos matemáticos, la función f es **constante** si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del dominio tales que $x_1<x_2$, se cumple que $f(x_1) = f(x_2)$.



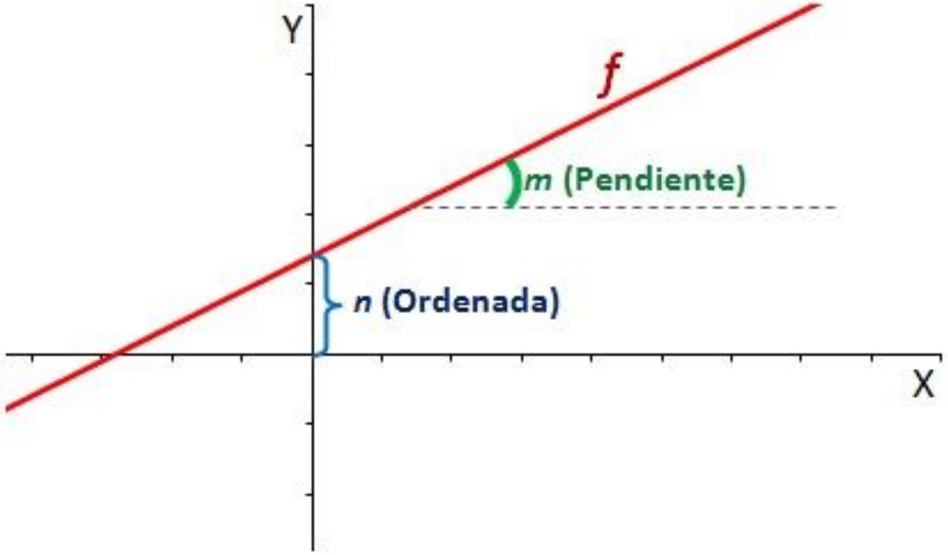
La **gráfica** de una **función constante** es una recta paralela al eje de abscisas X.

Función polinómica de primer grado

Las **funciones polinómicas de primer grado** o de grado 1 son aquellas que tienen un polinomio de grado 1 como expresión. Están compuestas por un escalar que multiplica a la variable independiente más una constante. Su mayor exponente es *x* elevado a 1.

$$f(x) = mx + n$$

$$\text{siendo } m \text{ la pendiente y } n \text{ la ordenada}$$



Su representación gráfica es una recta de pendiente *m*.

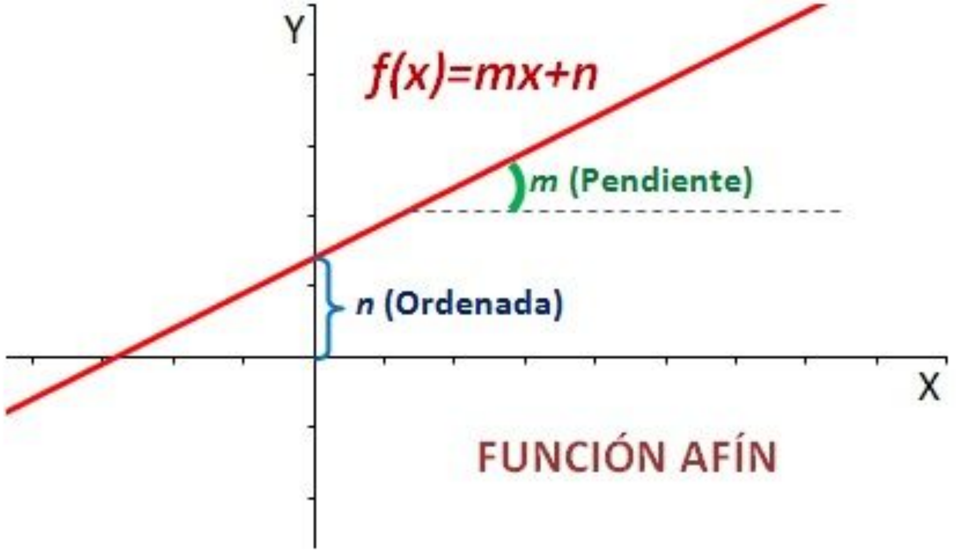
Función afín

Una **función afín** es una función polinómica de primer grado que no pasa por el origen de coordenadas, o sea, por el punto (0,0).

Las **funciones afines** son **rectas** definidas por la siguiente fórmula:

$$f(x) = mx + n$$

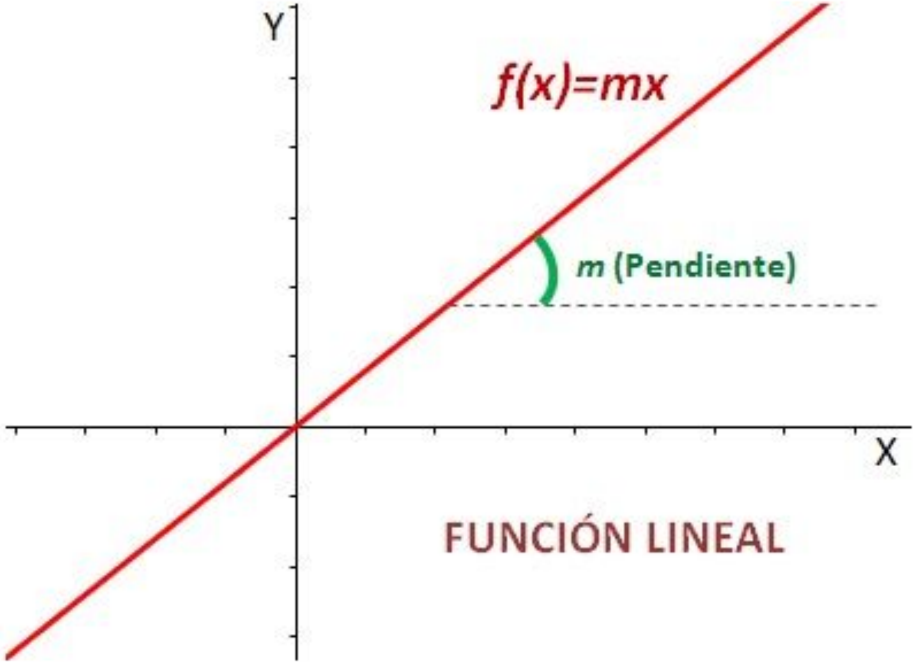
Los escalares m y n son diferentes de 0.



Una **función lineal** es una función polinómica de grado 1 que pasa por el origen de coordenadas, es decir, por el punto (0,0). Son funciones **rectas** de la forma:

$$f(x) = mx$$

$$\text{siendo } m \text{ la pendiente y diferente de } 0$$



También se llaman **funciones de proporcionalidad directa**. La constante *m* es la **razón de proporcionalidad**.

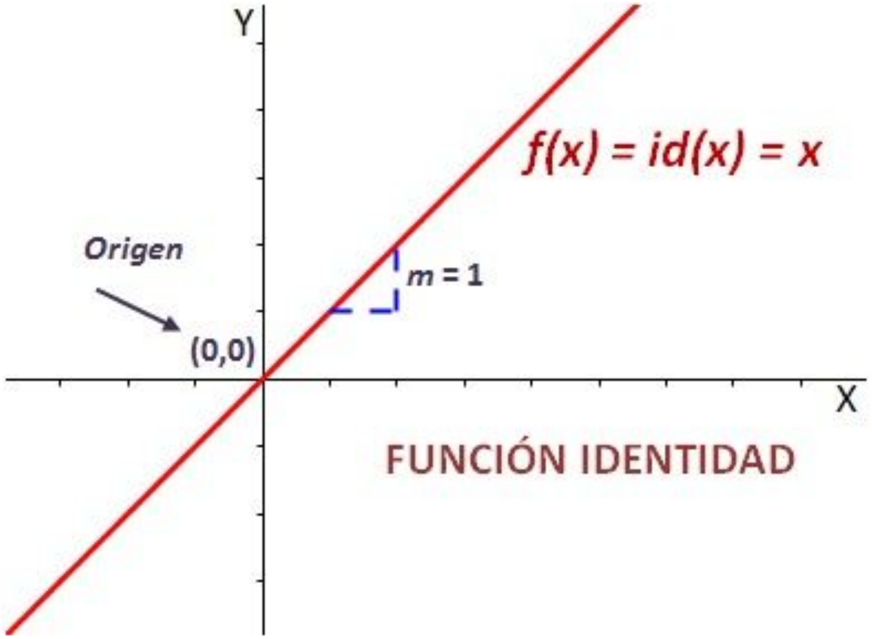
El término independiente *n* de la función afín es cero.

Función identidad

Una **función identidad** es una función tal que la imagen de cualquier elemento es éste mismo:

$$f(x) = x$$

Estas funciones también suele denotarse por ***id***.



La **función identidad** es una función lineal de pendiente $m = 1$ que pasa por el origen de coordenadas, es decir, por el punto (0,0). Divide el primer y el tercer cuadrante en partes iguales, o sea, es su bisectriz.

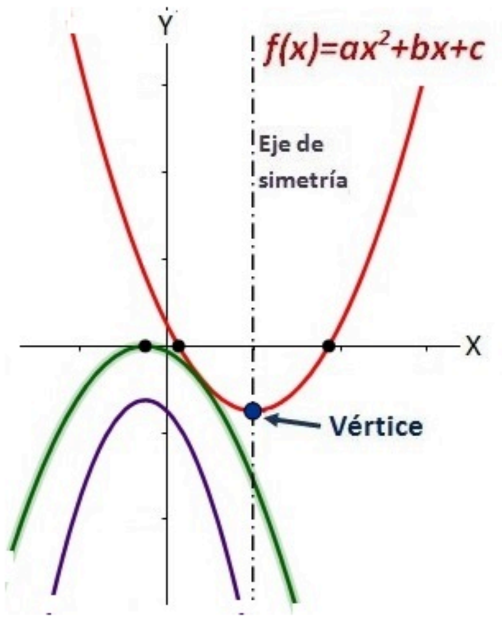
Función cuadrática

Las **funciones cuadráticas** (o funciones de segundo grado) son funciones polinómicas de **grado 2**, es decir, el mayor exponente del polinomio es *x* elevado a 2 (x^2):

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

$$\text{siendo } a \neq 0$$

Su **representación gráfica** es una parábola vertical.



Una función cuadrática puede tener dos raíces reales, una o ninguna. Las raíces de una función son los elementos del dominio que la hacen nula. Es decir, son los puntos donde la gráfica de la función corta al eje *X*.

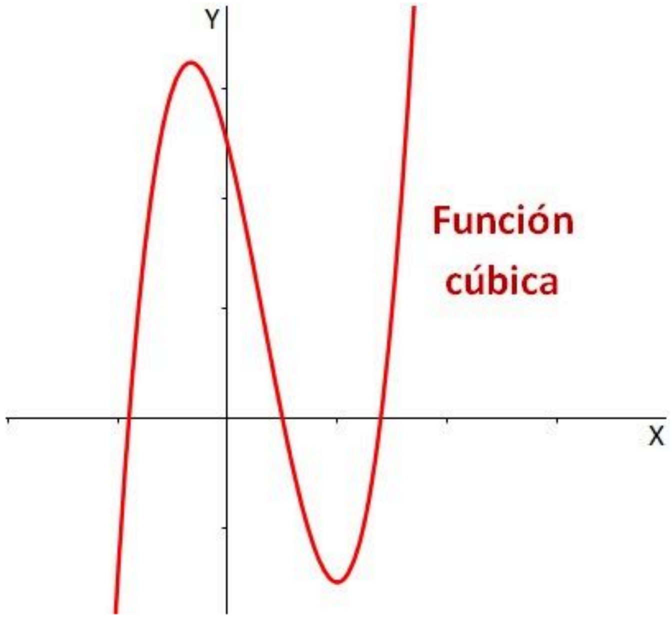
Función cúbica

Las **funciones cúbicas** (o funciones de tercer grado) son funciones polinómicas de **grado 3**, es decir, las que el mayor exponente del polinomio es *x* elevado a 3 (x^3):

$$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$

$$\text{siendo } a \neq 0$$

La **representación gráfica** de la función cúbica es:



Una función cúbica puede tener tres raíces reales dos o una. Las raíces de una función son los elementos del dominio que la hacen nula. Es decir, son los puntos donde la gráfica de la función corta al eje *X*.

Función racional

Las **funciones racionales** *f*(*x*) son el cociente irreducible de dos polinomios (para ello, no deben tener las mismas raíces). La palabra racional hace referencia a que esta función es una razón.

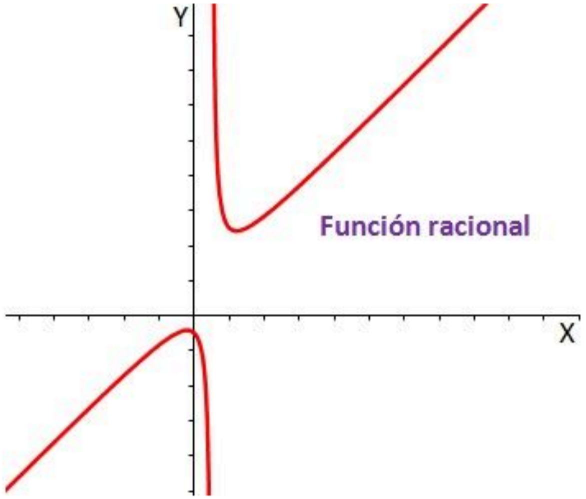
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

P(*x*) es el polinomio del numerador y *Q*(*x*) el del denominador (La variable *x* debe de estar en el **denominador**).

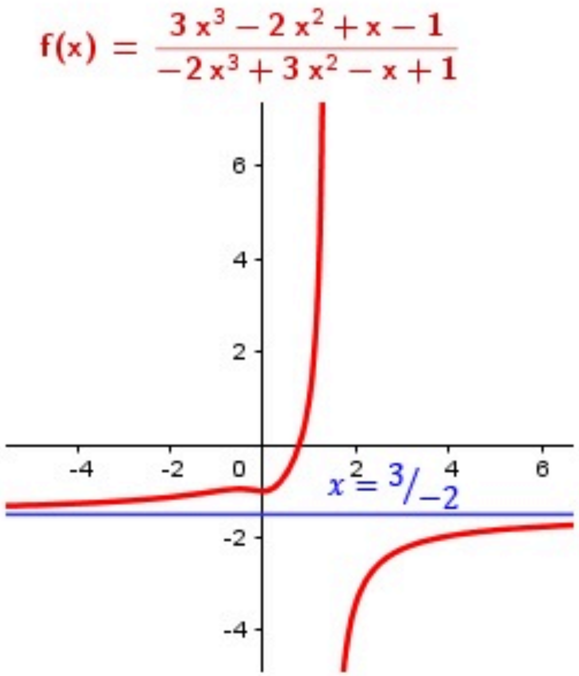
El **dominio** de una **función racional** son todos los números reales excepto los valores de la variable *x* que anulan el denominador (*Q*(*x*)) = 0), es decir, excepto las raíces del polinomio correspondiente al denominador.

$$Dom\ f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \setminus Q(x) = 0\}$$

La **gráfica** de estas funciones, si el polinomio del denominador *Q*(*x*) es de grado 1, es una **hipérbola**:



(En todas las funciones racionales en las que el grado del polinomio del numerador *P(x)* sea el mismo que grado del del denominador *Q(x)*, existe una asíntota horizontal *y* = *a* / *k*, siendo aquí *a* y *k* los coeficientes de los términos de mayor grado de *P(x)* y de *Q(x)*) respectivamente.



Función de proporcionalidad inversa

Una **función de proporcionalidad inversa** es la que, cuando la variable dependiente *y* es igual a una constante dividida por la variable independiente *x* . Su expresión es:

$$y = \frac{k}{x}$$

$$k \neq 0$$

k es el **coeficiente de proporcionalidad inversa**.

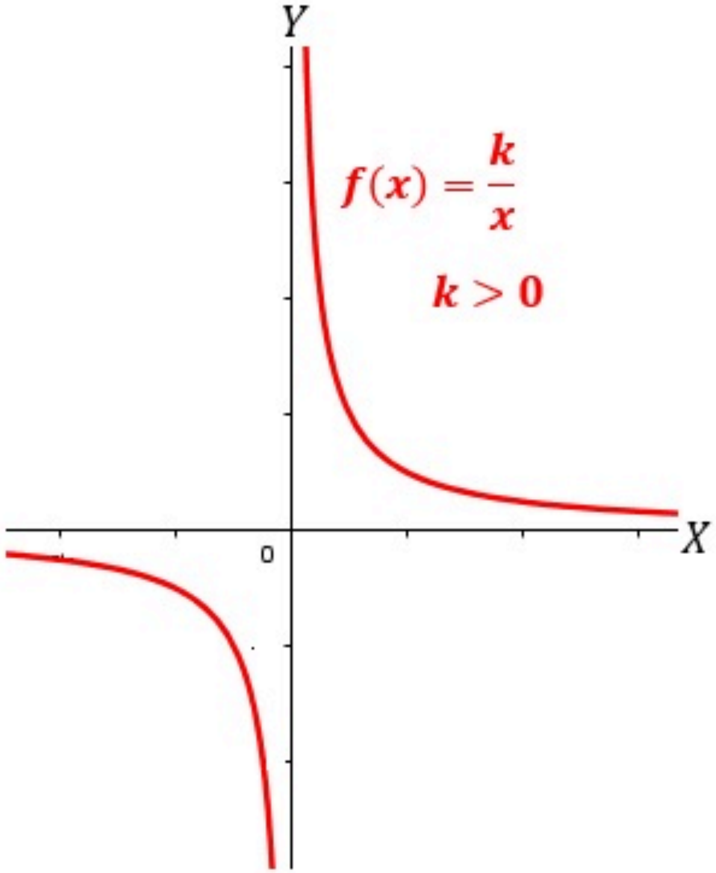
Su dominio y su codominio son los números reales, excepto en las asíntotas ($x = 0$ e ($y = 0$) en donde hay un punto de ruptura y el denominador es nulo.

$$Dom\ f = \mathbb{R} - \{0\}$$

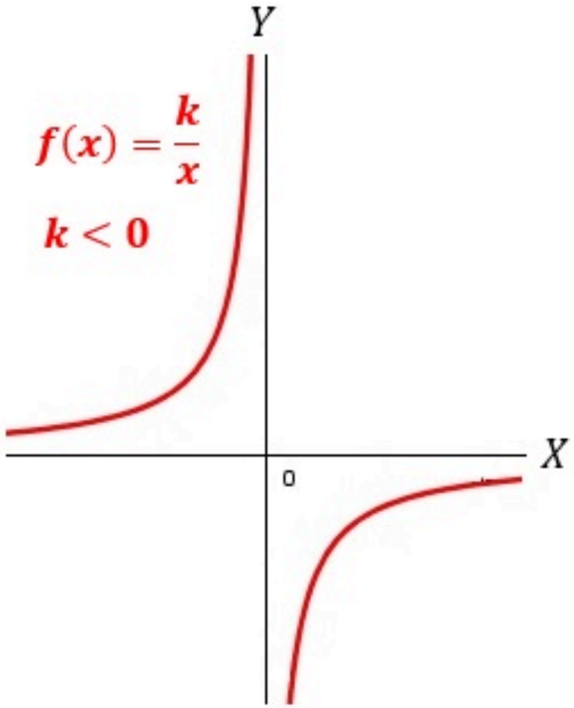
La **derivada de la función de proporcionalidad inversa** es:

$$f'(x) = \frac{-k}{x^2}$$

Si $k > 0$, la función es decreciente y está en el primer y tercer cuadrante.



Si $k < 0$, la función es creciente y está en el segundo y cuarto cuadrante.



La gráfica es una hipérbola equilátera con una asíntota vertical y otra horizontal en los dos ejes de coordenadas.

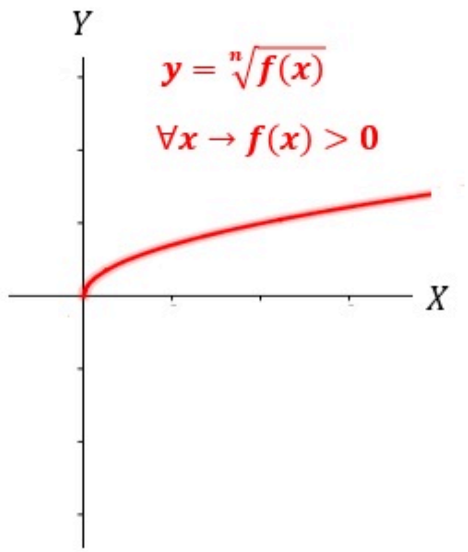
Función radical

Una **función radical** o **función raíz** es la que la variable dependiente *y* se obtiene de una raíz que alberga en el radicando a la variable independiente *x*.

$$y = \sqrt[n]{f(x)}$$

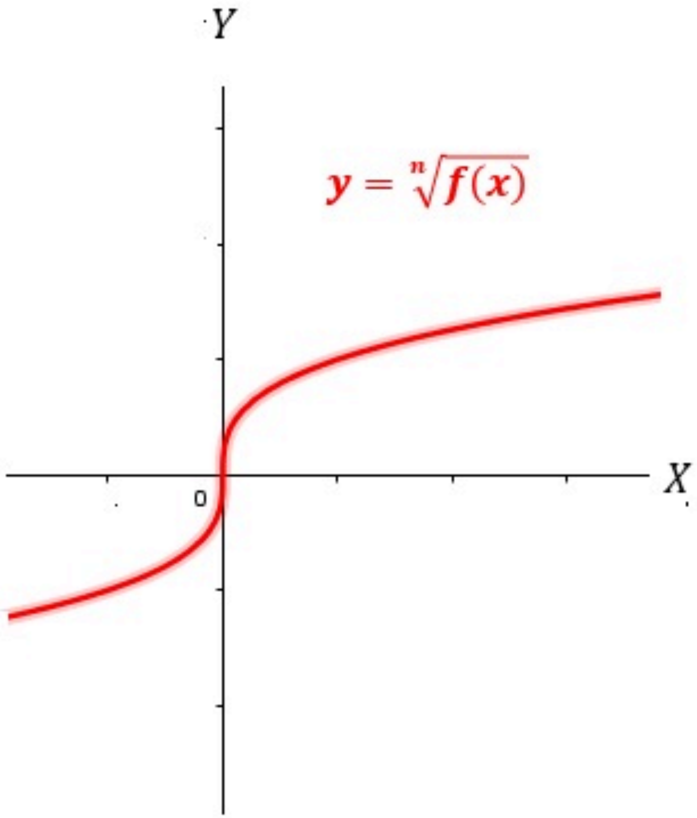
Son llamadas también funciones irracionales.

Cuando el índice de la raíz *n* es par, el dominio de la función son los valores de *x* que hacen al radicando cero o mayor que cero.



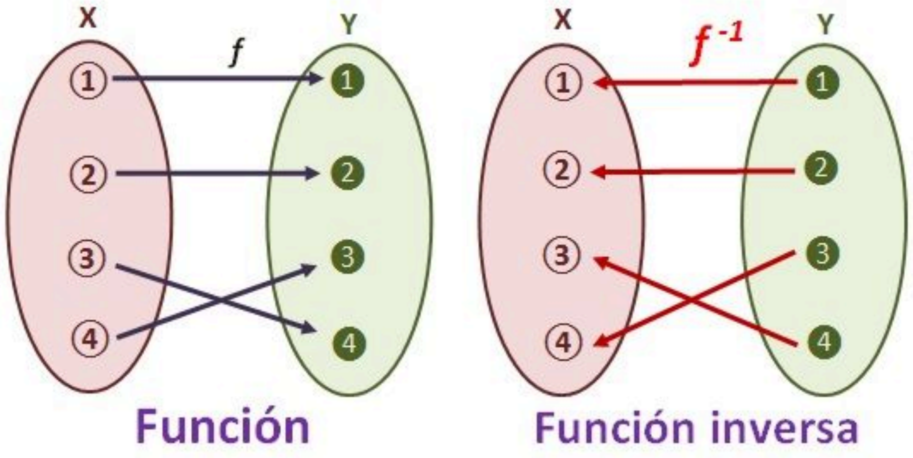
Cuando el índice es impar, el dominio son los números reales.

Un ejemplo de gráfica de función radical con índice n impar:



Función inversa

Sea f una función que asigna a los elementos de un primer conjunto (conjunto inicial X) un elemento de un segundo conjunto (conjunto final Y). La **función inversa** (o función recíproca) de f (denotada por $\boldsymbol{f^{-1}}$) es aquella que hace el camino inverso, asignando a los elementos de Y elementos de X.



Formalmente, diremos que $\boldsymbol{f^{-1}}$ es la **inversa** de f si:

$$\text{Si } f(x) = y \quad \text{entonces} \quad f^{-1}(y) = x$$

También podemos definir una función inversa a partir de la composición de funciones. $\boldsymbol{f^{-1}}$ es la **inversa** de f y f^{-1} si la composición de f da la función identidad.

$$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = x$$

Para que una función f tenga inversa necesariamente debe ser **inyectiva**.

Funciones trascendentes

Una **función trascendente** es la que la variable independiente *x* se encuentra en el exponente, el índice de una raíz, en un logaritmo o en una función trigonométrica.

Para una función trascendente no basta con operaciones algebraicas, sino que se requieren cálculos como derivadas, integrales, trigonometría, etc.

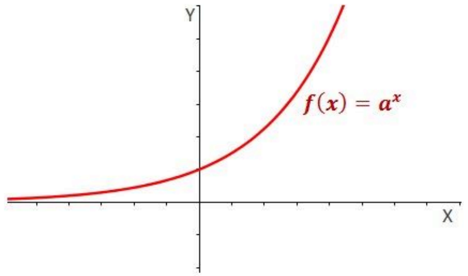
Son funciones trascendentes las exponenciales, las potenciales exponenciales, logarítmicas o las trigonométricas.

Función exponencial

Una **función exponencial** es aquella que la variable independiente *x* aparece en el **exponente** y tiene de base una constante *a*. Su expresión es:

$$f(x) = a^x$$

siendo a un real positivo, $a > 0$, y diferente de 1, $a \neq 1$.

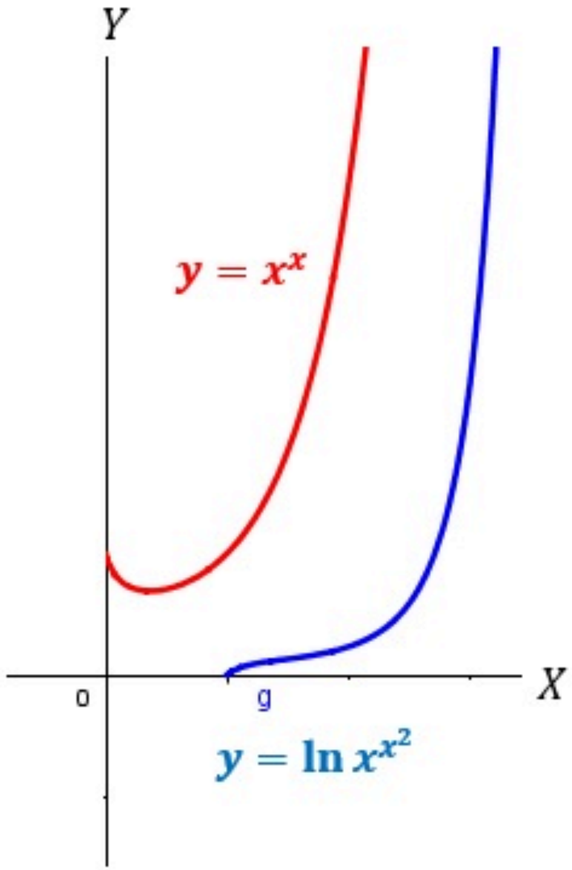


También se suele denotar la función como **exp (x)**.

La **función potencial exponencial** es aquella en la que, tanto la base como el exponente son funciones. Dicho de otra manera, la variable independiente x se encuentra en la base y en el exponente. Su forma genérica es:

$$y = f(x)^{g(x)}$$

Estas son dos gráficas de la función potencial exponencial. Una, más simple y otro ejemplo cualquiera:

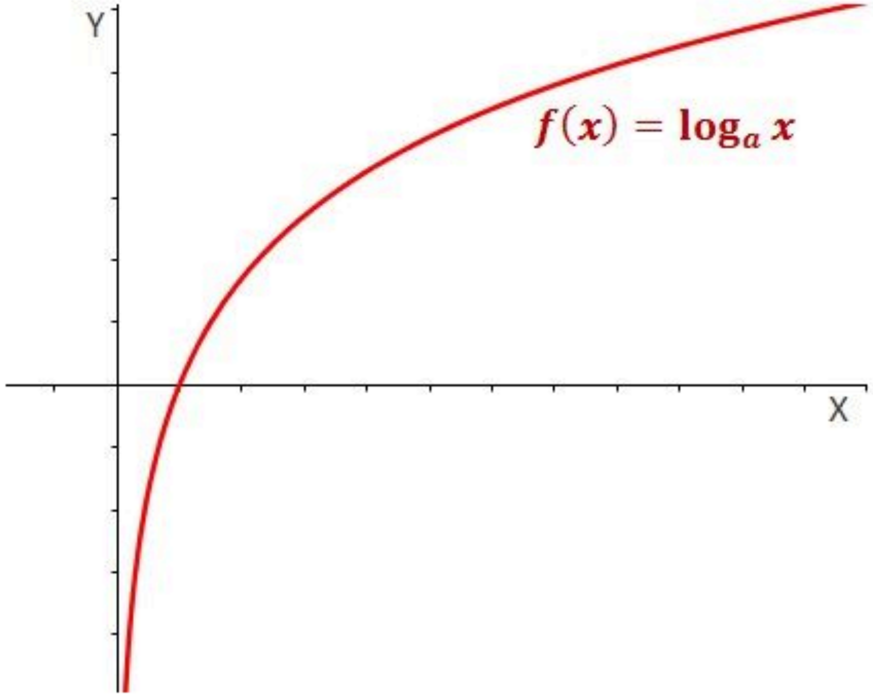


Función logarítmica

Una **función logarítmica** está formada por un **logaritmo** de base *a*, y es de la forma:

$$f(x) = \log_a(x)$$

siendo *a* un real positivo, $a > 0$, y diferente de 1, $a \neq 1$.



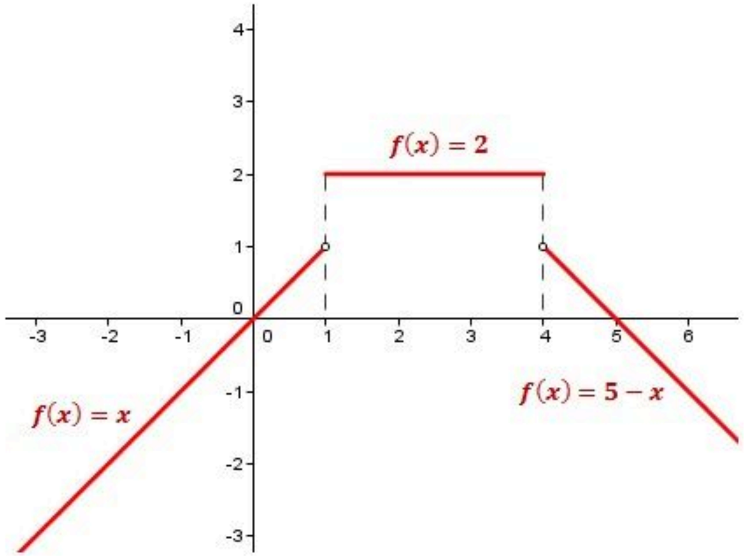
La **función logarítmica** es la inversa de la función exponencial.

Funciones definidas a trozos

Las **funciones definidas a trozos** (o **función por partes**) si la función tiene distintas expresiones o fórmulas dependiendo del intervalo (o trozo) en el que se encuentra la variable independiente (*x*).

Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\infty < x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 5 - x & \text{si } 4 < x < \infty \end{cases}$$

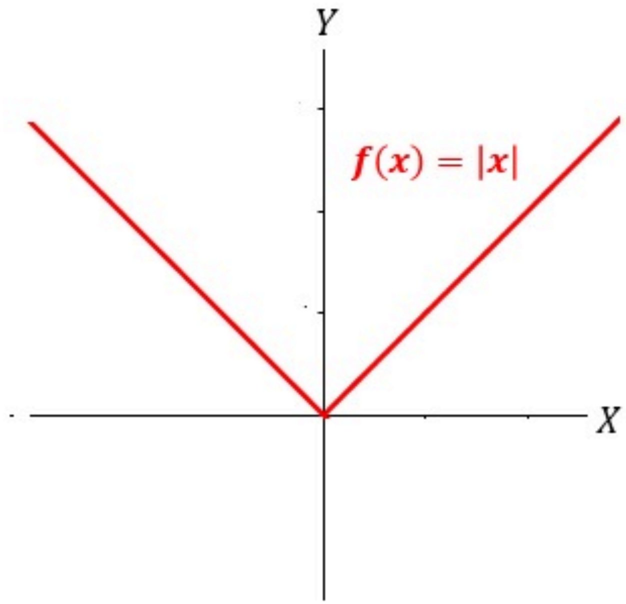


La imagen de un valor *x* se calcula según en que intervalo se encuentra *x*. Por ejemplo, el 0 se encuentra en el intervalo (-∞,1), por lo que su imagen es *f*(0)=0. El valor 3 está en el intervalo [1,4], entonces su imagen es *f*(3)=2.

Función valor absoluto

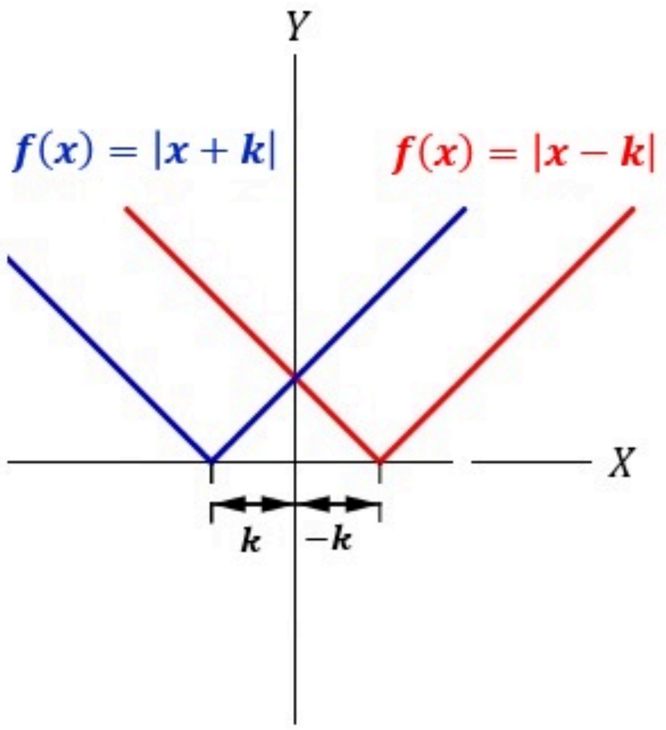
La **función valor absoluto** devuelve el valor numérico del segundo término, pero afectado siempre del signo positivo. Tiene sentido para caracterizar distancias, longitudes.

La expresión más simple de una función **valor absoluto** es: $f(x) = |x|$ y la gráfica son dos rectas simétricas en el primer y segundo cuadrante, con pendientes 1 y -1 (forma de "V") que se cortan en el origen (0,0).

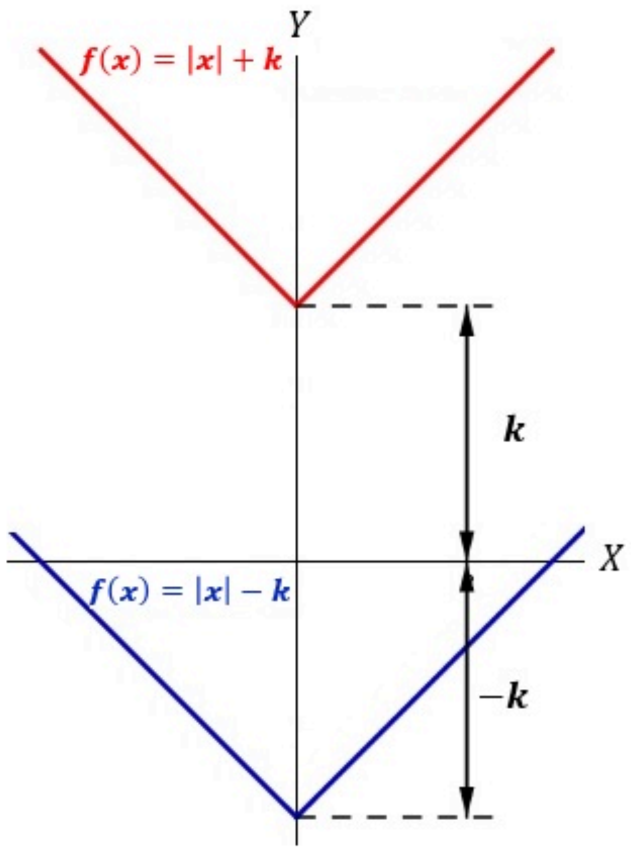


El dominio son números reales y el codominio, los reales positivos.

Una **función valor absoluto** se puede desplazar, simplemente, deslizándose el vértice a derecha e izquierda por el eje de las *X* con esta forma: *f(x)* = |*x* ±*k*|. (si *k* va con signo más , la gráfica se desplaza una distancia *k* hacia la izquierda; si *k* va con signo menos, la gráfica se desplaza una distancia *k* hacia la derecha). El vértice estará en (∓k, 0).



También se puede desplazar verticalmente, deslizándose el vértice arriba o abajo por el eje de las *Y* con esta forma: $f(x) = |x| \pm k$. (si *k* va con signo más, la gráfica se desplaza una distancia *k* hacia arriba; si *k* va con signo menos, la gráfica se desplaza una distancia *k* hacia abajo. El vértice estará en $(0, \pm k)$.



(En ambos casos, tomamos la constante *k* como un número positivo)