Semejanza de Figuras Planas y Teorema de Euclides

- Departamento de Matemática
- Liceo Javiera Carrera
- Profesor Angel Oteiza Soto

- Primeros y Segundos Medios 2021

Objetivos

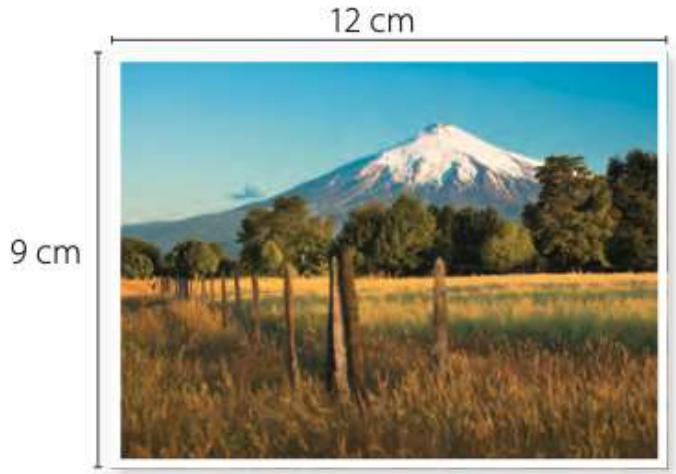
- Comprender los criterios de semejanza en figuras geométricas
- Comprender los teoremas de Euclides utilizando la semejanza de triángulos.

Habilidades

- Al ajustar modelos eligiendo los parámetros adecuados para que se acerquen más a la realidad estás desarrollando la habilidad de modelar

Semejanza de Figuras

Un fotógrafo ha tomado una foto con forma rectangular del volcán Villarrica, como se aprecia en la imagen. Luego quiere obtener otra fotografía que sea semejante a la que tomó inicialmente.



- Si la otra fotografía quiere que de ancho mida 6 cm, para que sea semejante a la fotografía original, ¿cuál debe ser la medida de su otro lado? Explica.

Realiza tus cálculos

Explicación ▸ ______________________

____

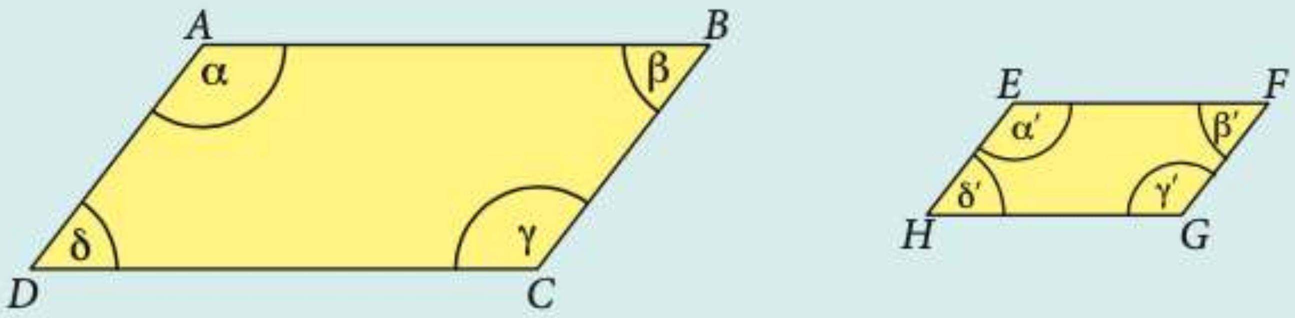
____

____

Teorema de Semejanza

Dos figuras son **semejantes (~)** cuando tienen la misma forma. Dos polígonos son semejantes si sus ángulos interiores correspondientes son congruentes y la razón entre las medidas de sus lados correspondientes es constante.

Para que el cuadrilátero *ADCB* sea semejante con el cuadrilátero *EHGF*, se debe cumplir:



1. Los ángulos correspondientes tienen la misma medida: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$.

2. La medida de los lados correspondientes son proporcionales. La constante de proporcionalidad k recibe el nombre de razón de semejanza.

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = k$$

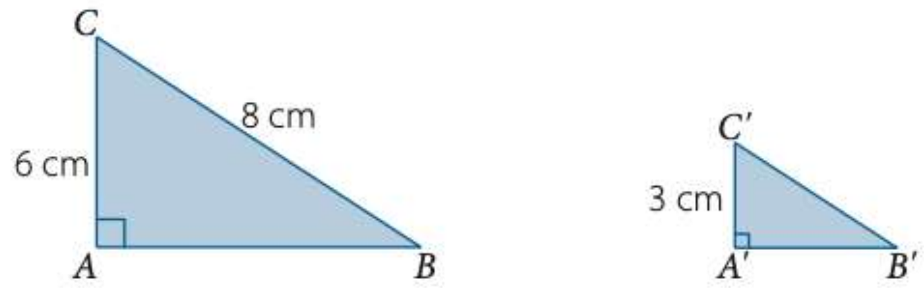
Ejemplos

En un mapa que utiliza una escala 1 : 50 000, la distancia entre dos casas es de 1,8 cm, ¿cuál es la distancia real entre las casas?

1. La razón es 1 : 50 000 significa que 1 cm del mapa corresponden a 50 000 cm en la realidad.
2. La distancia entre las dos casas, que se encuentra en el mapa, corresponde a 1,8 cm.
3. La proporcionalidad a resolver es $\frac{1}{50\,000} = \frac{1{,}8}{x} \blacktriangleright x = 90\,000$.

Respuesta: La distancia que separa las dos casas es de 90 000 cm, que equivale a 900 m.

Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, ¿cuánto mide el lado $B'C'$?

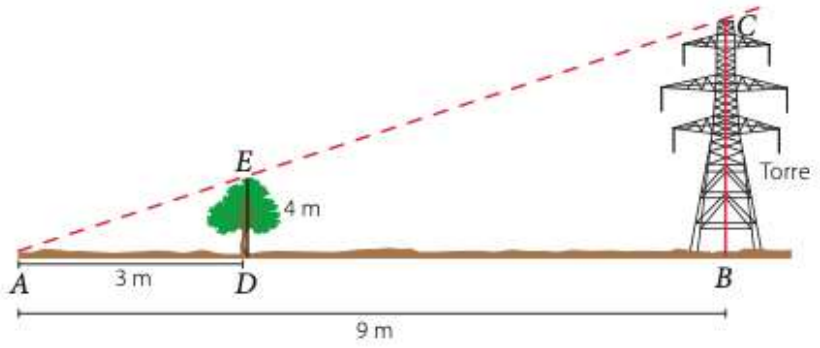


Ya que los triángulos son semejantes, la medida de los lados correspondientes es proporcional, es decir:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \blacktriangleright \frac{6}{3} = \frac{8}{B'C'} \blacktriangleright B'C' = \frac{8 \cdot 3}{6} \blacktriangleright B'C' = 4$$

Respuesta: La medida del lado $B'C'$ es 4 cm.

Una torre de alta tensión da una sombra y a la misma hora un árbol proyecta una sombra, formándose dos triángulos semejantes ($\Delta ABC \sim \Delta ADE$), como se muestra en la imagen. ¿Cuál es la altura de la torre?



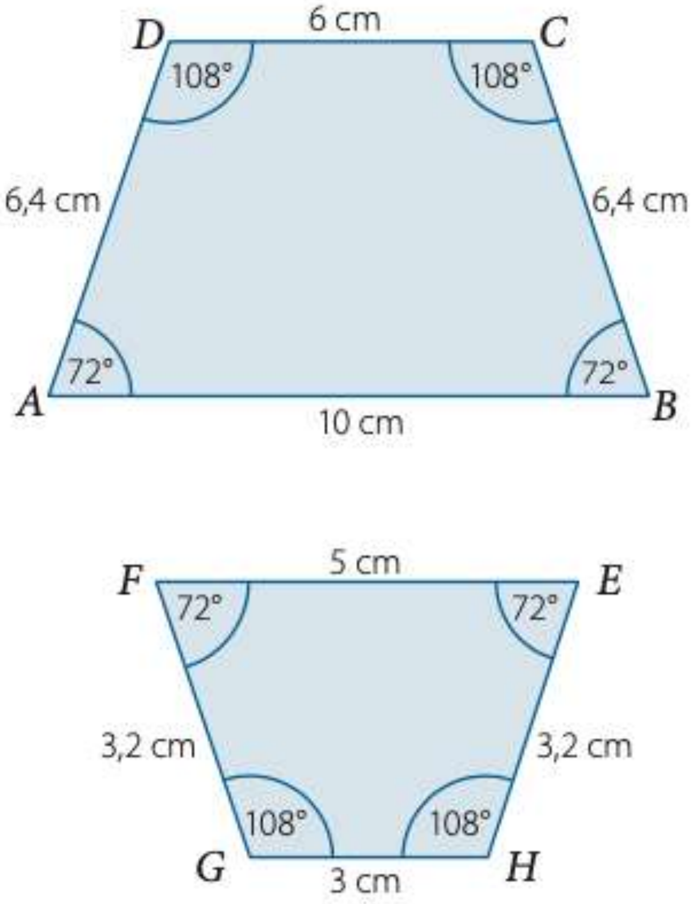
Los triángulos son semejantes. Al aplicar proporcionalidad entre los lados correspondientes se tiene: $\frac{9}{3} = \frac{x}{4} \blacktriangleright x = \frac{9 \cdot 4}{3} \blacktriangleright x = 12$

Respuesta: La altura de la torre de alta tensión es de 12 m.

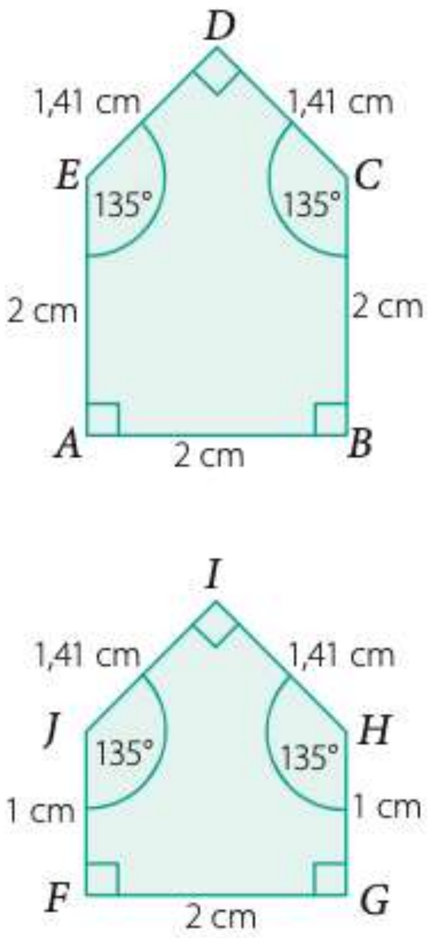
Ejercicios

Explica si los siguientes polígonos son semejantes o no. Argumenta tu afirmación.

a.

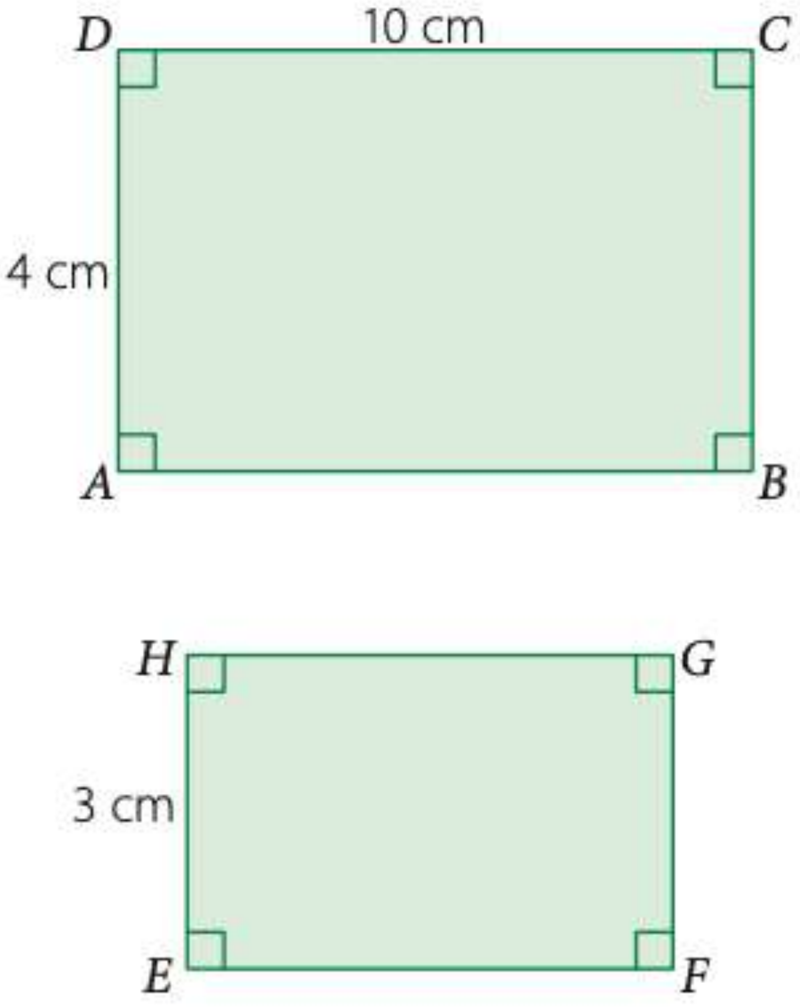


b.

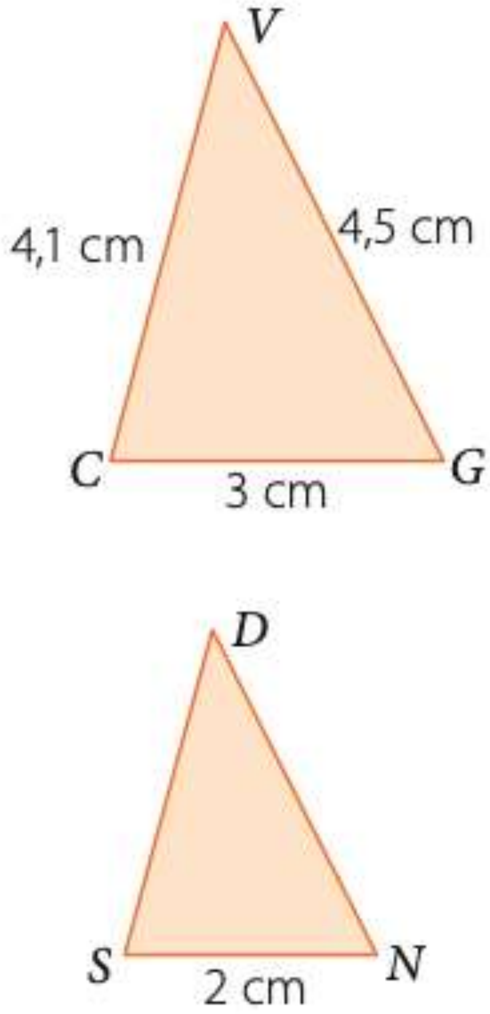


2. **Calcula la medida del lado que falta en los siguientes polígonos semejantes.**

a. Calcula la medida del lado $\overline{FE}$.



b. Calcula la medida de los lados $\overline{SD}$ y $\overline{ND}$.



3. **Resuelve los siguientes problemas.**

a. Si el largo y el ancho del rectángulo $ABCD$ son 3 cm y 1 cm respectivamente, mientras que el largo y el ancho del rectángulo $EFGH$ son 5 cm y 3 cm respectivamente, ¿son semejantes los rectángulos? Justifica tu respuesta.

b. En un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5 cm, se cuadruplican todos sus lados para construir otro triángulo, ¿es este triángulo semejante al inicial? Explica.

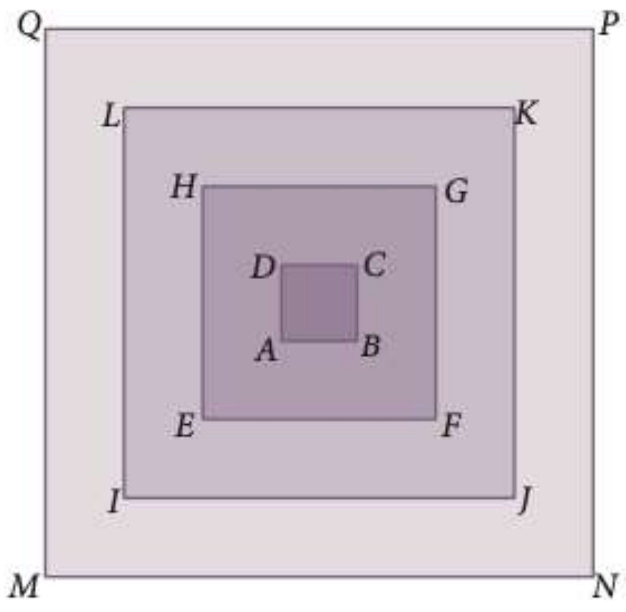
4. **Analiza los siguientes cuadrados y luego responde.**

a. ¿Son todos los cuadrados semejantes? Explica.

b. ¿Cuál es el centro de homotecia que transforma los cuadrados?

c. Utilizando una regla y considerando el cuadrado $ABCD$ como preimagen, ¿cuál es el valor de la razón de homotecia respecto del cuadrado $EFGH$? ¿Cómo lo calcularías con los otros cuadrados? Explica.

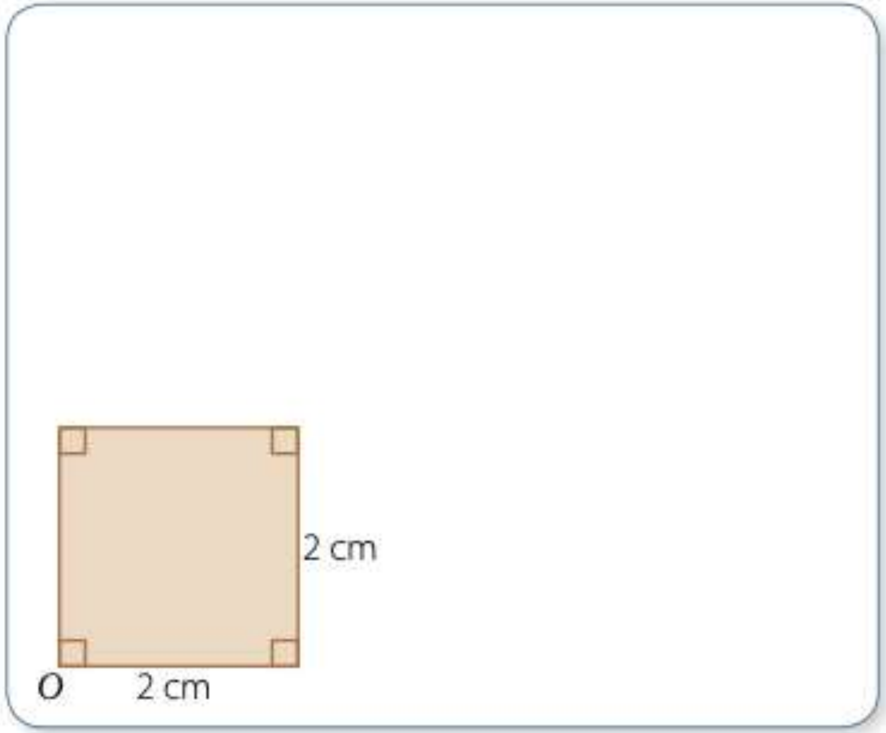
d. Construye el siguiente cuadrado exterior. Explica cómo lo construiste.



5. **Se muestra un cuadrado donde se ha marcado uno de sus vértices *O*, el que corresponde al centro de una homotecia. Utilizando una homotecia de centro *O*, se quiere construir un cuadrado que tenga el cuádruple del área del cuadrado dado.**

a. ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia?

b. Utilizando regla y compás, realiza la construcción y explica la construcción realizada.



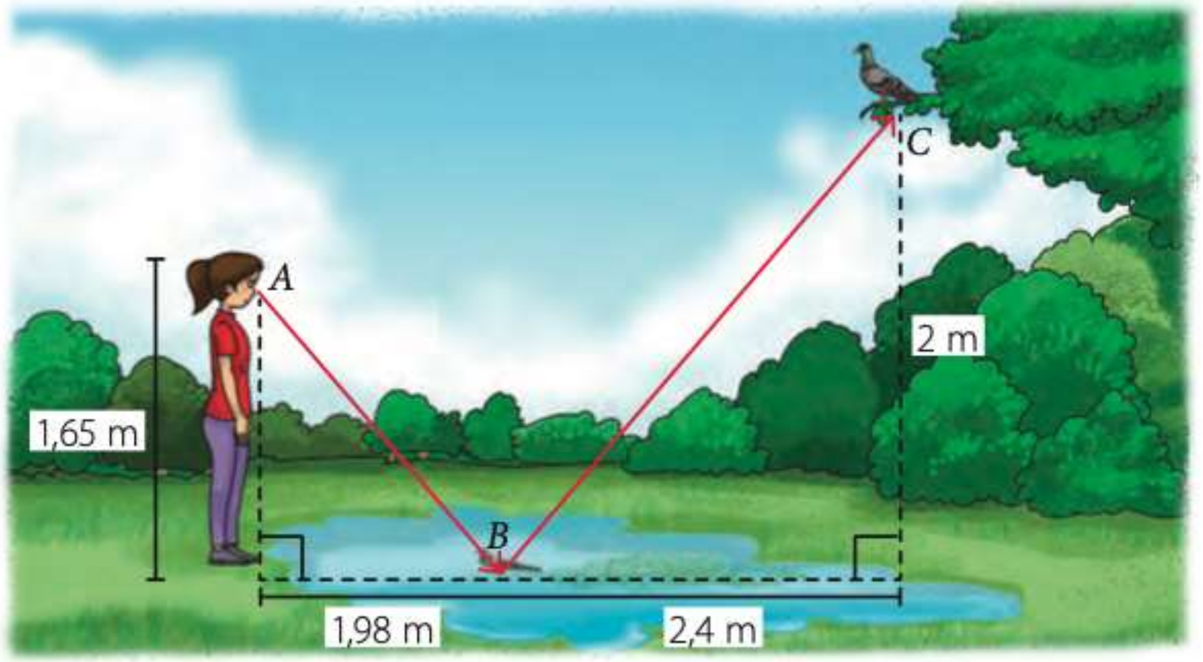
6. **Analiza la siguiente información y luego realiza lo solicitado.**

Un jardinero quiere cuadruplicar el área de un jardín circular de flores, que tiene un radio de 3 m.

- Dibuja en tu cuaderno el modelo del jardín en la escala de 1 : 100.
- Elige el centro del círculo como el centro de una homotecia con la cual se logra el objetivo. Luego utiliza regla y compás para realizar la construcción.

Criterios de Semejanza

Al visitar un parque de su comuna, Gabriela observa en un charco de agua la silueta de una paloma, como se muestra a continuación.



- ¿Las distancias que se muestran son proporcionales? Argumenta tu respuesta.

____

____

- Para calcular la distancia entre A y B y sin utilizar el teorema de Pitágoras, ¿qué distancia necesitas saber? Explica.

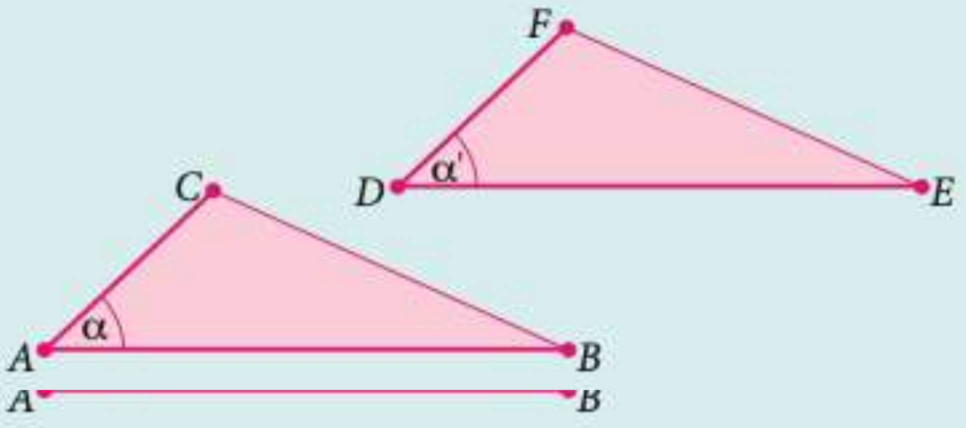
____

____

Criterios

Los criterios de **semejanza** de triángulos establecen condiciones suficientes para decidir si dos triángulos son o no semejantes.

- **Criterio lado, ángulo, lado (LAL):** Dos triángulos son semejantes si dos lados correspondientes tienen medidas proporcionales y el ángulo comprendido por ellos tienen igual medida.



Si se cumple que: $\alpha = \alpha'$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

Se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

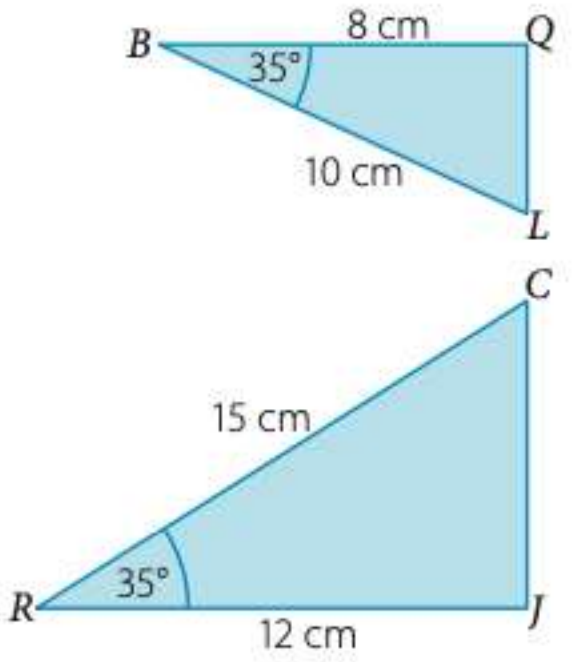
Ejemplo

El triángulo LQB, ¿es semejante al triángulo RJC?

El ángulo formado entre los lados que tienen las medidas anotadas es igual en ambos triángulos, por lo que se determinará si los lados correspondientes son proporcionales.

$$\frac{BL}{RC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \text{ y } \frac{BQ}{RJ} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

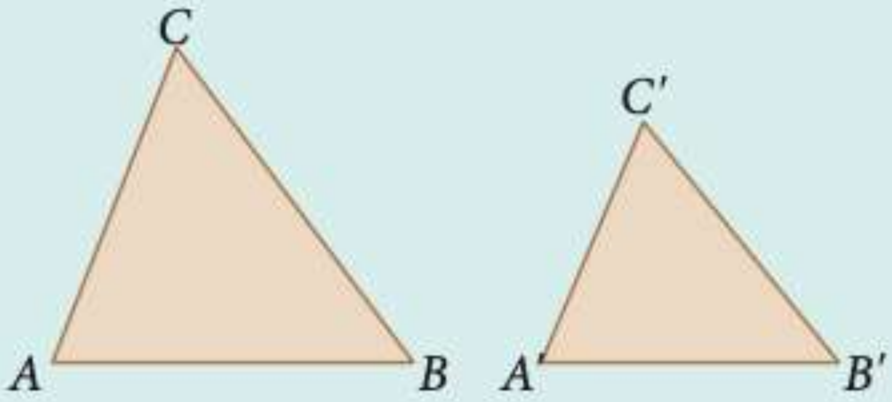
Respuesta: Se cumple el criterio lado, ángulo, lado (LAL), por lo tanto $\Delta LQB \sim \Delta CJR$.



Criterio LLL

Criterio lado, lado, lado (LLL)

Dos triángulos son **semejantes** si los tres pares de lados correspondientes tienen medidas proporcionales.



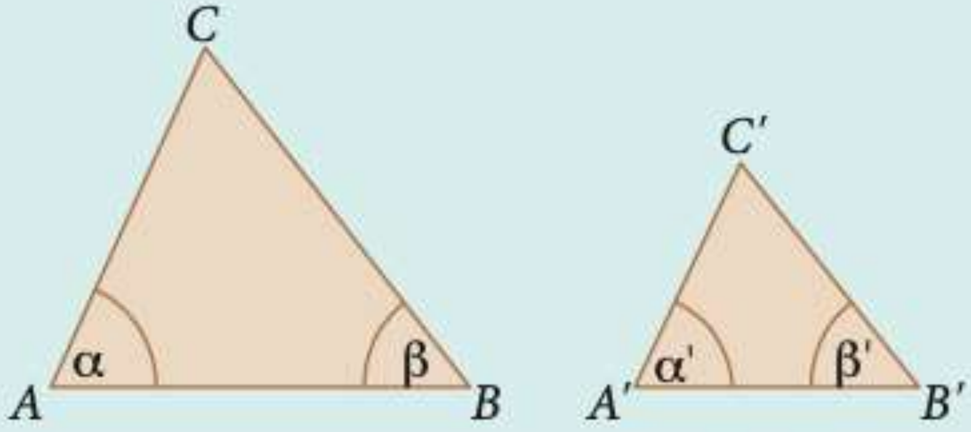
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Criterio AA

Criterio ángulo, ángulo (AA)

Dos triángulos son **semejantes** si dos de sus ángulos interiores correspondientes tienen igual medida.

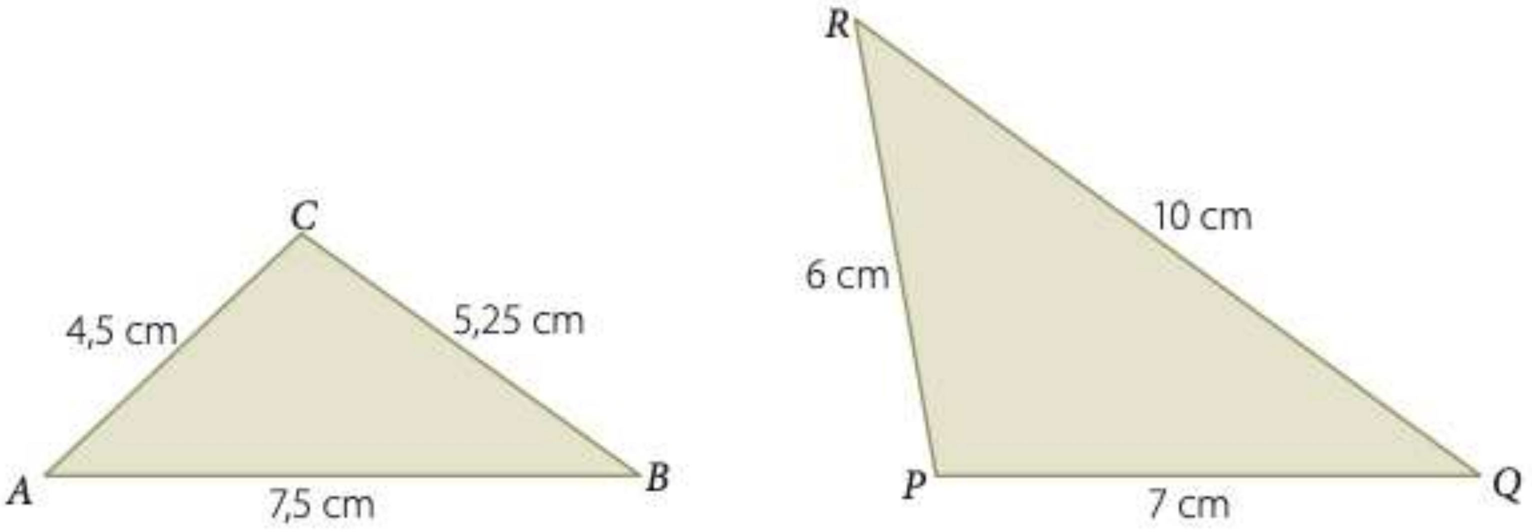


$\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Ejemplo

¿Los triángulos que se muestran son semejantes?



Se calculará el valor de razón entre los lados proporcionales, es decir:

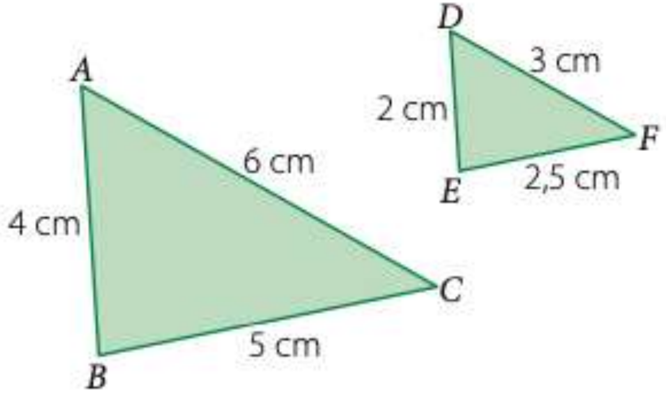
$\frac{AB}{QR} = \frac{7,5}{10} = 0,75$ $\frac{BC}{QP} = \frac{5,25}{7} = 0,75$ $\frac{CA}{RP} = \frac{4,5}{6} = 0,75$

Respuesta: Se cumple el criterio lado, lado, lado (LLL), por lo tanto $\Delta ABC \sim \Delta RQP$.

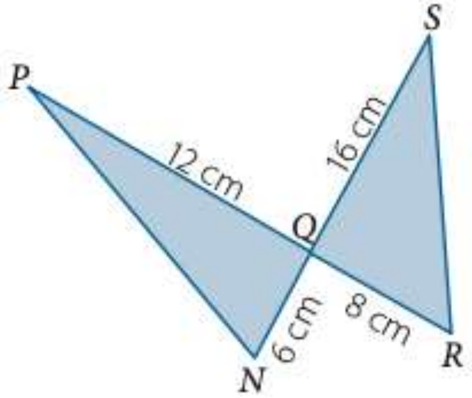
Ejercicios

1. Determina qué criterio permite explicar la semejanza entre cada par de triángulos. Justifica tu respuesta.

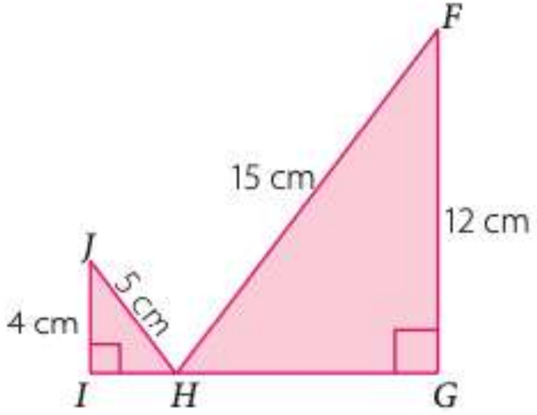
a.



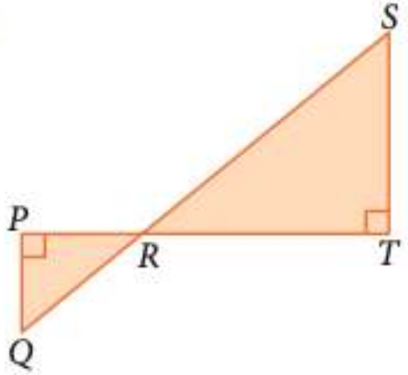
b.



c.

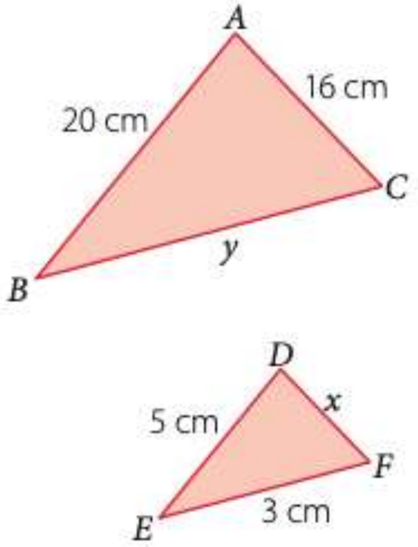


d.

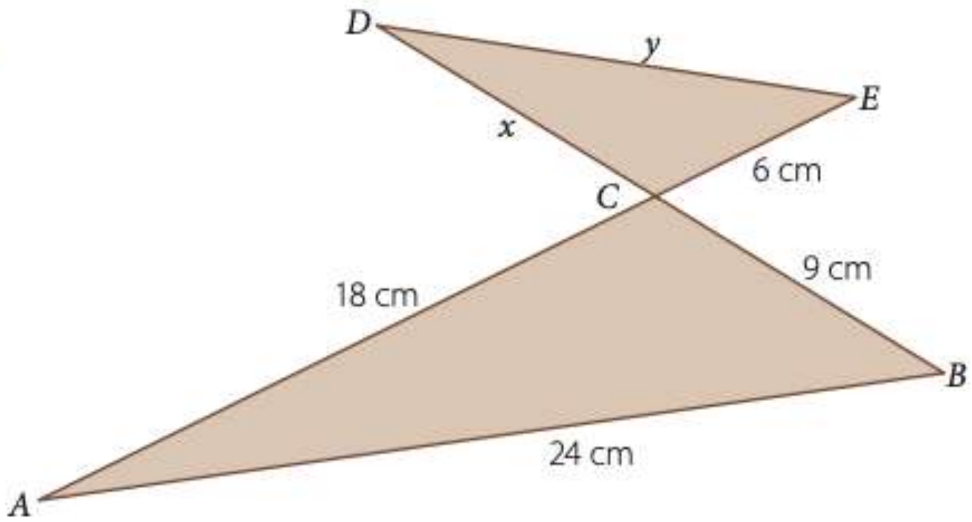


2. Teniendo en cuenta que los triángulos son semejantes, calcula cada valor desconocido.

a.



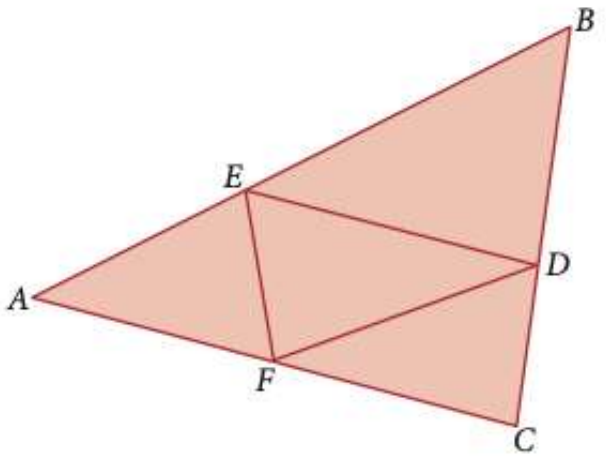
b.



3. Calcula la medida de $\overline{EF}$ y la medida de $\overline{DF}$, si:

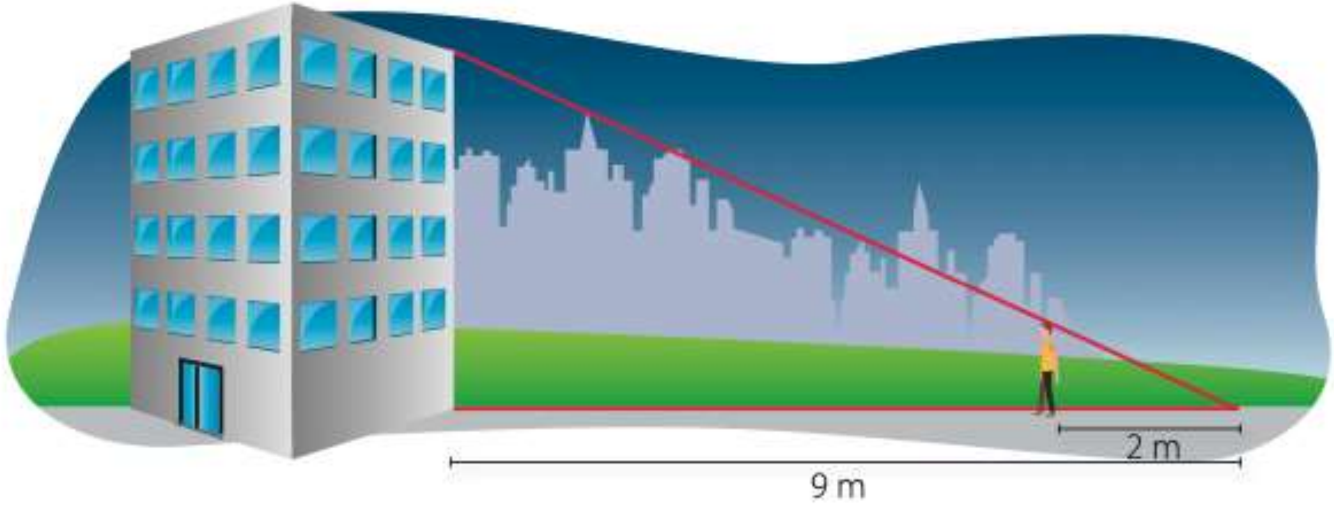
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$AB = 12$ cm
$BC = 8$ cm
$AC = 10$ cm
$DE = 6$ cm

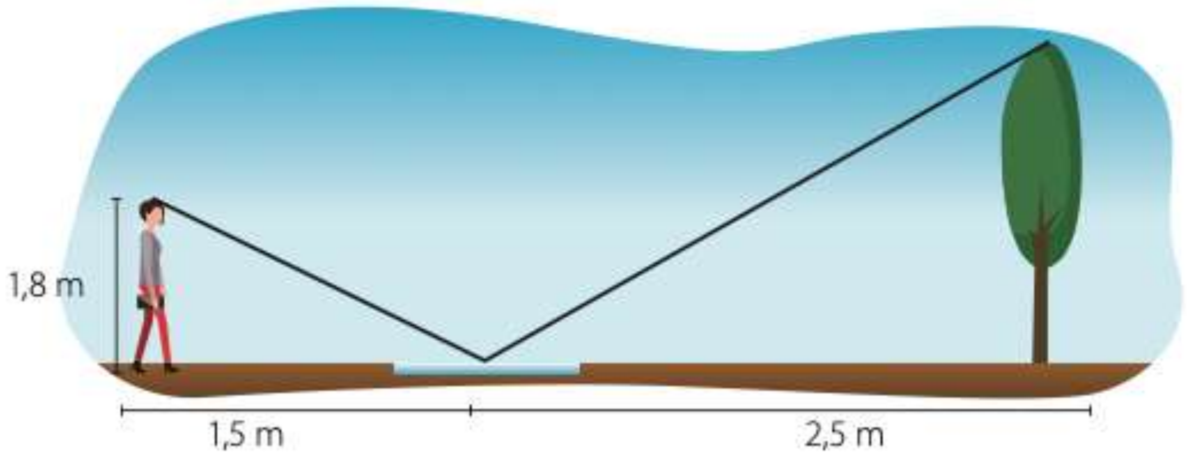


4. Resuelve los siguientes problemas.

a. Si la persona mide 1,6 m, ¿cuál es la altura del edificio?

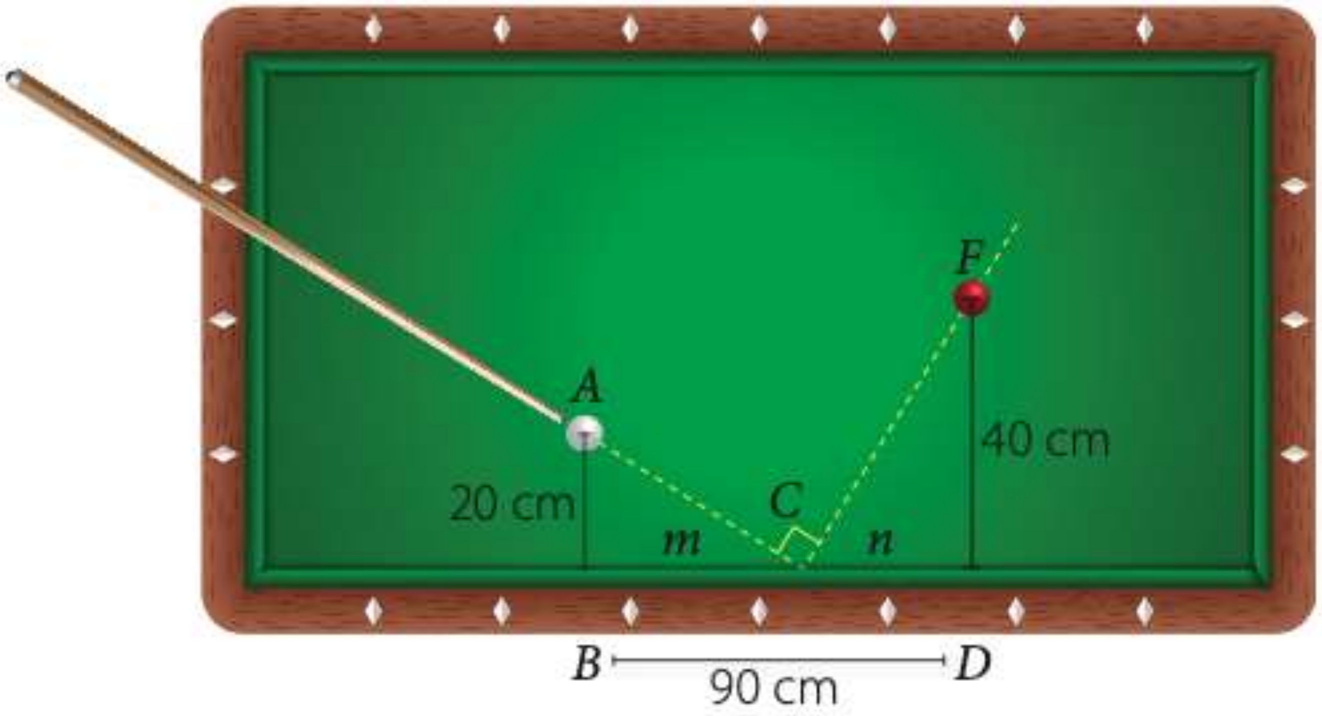


b. Existe un método para calcular la altura de un objeto, el cual consiste en colocar un espejo en el piso y ubicarse en un lugar desde el cual se vea, en el espejo, la parte más alta del objeto. En la figura, ¿cuál es la altura del árbol?



c. En la siguiente figura, *C* representa el punto en el cual rebota una de las bolas al ser golpeada sin efecto.

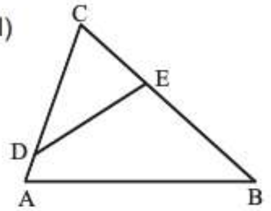
- Demuestra que $\Delta ABC \sim \Delta FDC$.
- Calcula la medida de m y n.



Ejercicio tipo PDT

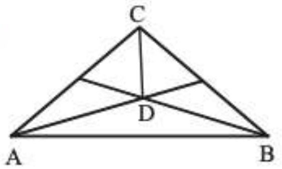
¿En cuál(es) de los siguientes casos se verifica(n) **siempre** la semejanza planteada?

I)



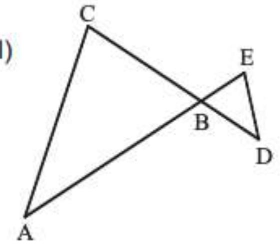
Si AC = 6 cm, DC = 5 cm, BC = 10 cm y EC = 3 cm, entonces Δ ABC ~ Δ EDC.

II)



Si los rayos AD y BD son bisectrices del Δ ABC, entonces Δ ADC ~ Δ BDC.

III)

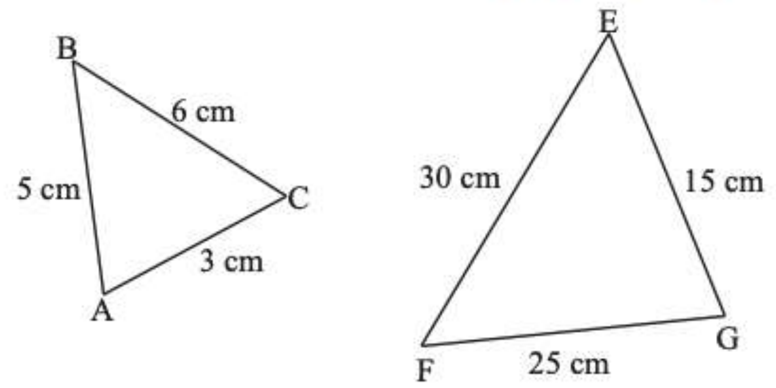


Si AB = 21 cm, BC = 15 cm, BD = 7 cm y BE = 5 cm, entonces Δ ABC ~ Δ DBE.

A) Solo en I
B) Solo en II
C) Solo en III
D) Solo en I y en II
E) Solo en I y en III

Ejercicio tipo PDT

En la figura adjunta los triángulos ABC y GFE son semejantes entre sí.



¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

I) $\dfrac{\text{perímetro } \Delta \text{ ABC}}{\text{perímetro } \Delta \text{ GFE}} = \dfrac{1}{5}$

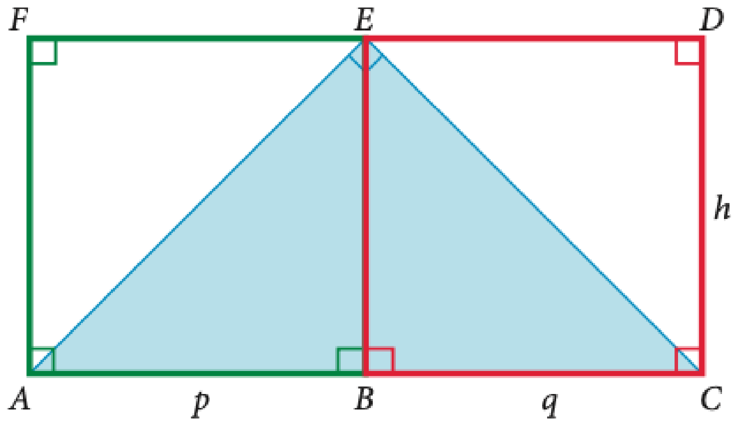
II) $\dfrac{\text{área } \Delta \text{ ABC}}{\text{área } \Delta \text{ GFE}} = \dfrac{1}{25}$

III) $\measuredangle \text{BAC} : \measuredangle \text{FGE} = 1 : 5$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

TEOREMA DE EUCLIDES

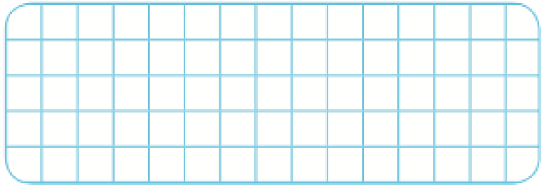
La medida del largo del rectángulo *ACDF* corresponde al doble de la medida del ancho. En el cual se inscribe un triángulo rectángulo isósceles *ACE*, como se muestra a continuación.



- ¿Es correcto afirmar que $\Delta ABE \sim \Delta CBE$? ¿Qué relación hay entre p y q? Explica.

- Utilizando solo las variables p y q, calcula el área del cuadrado verde y solo utilizando la variable h calcula el área del cuadrado rojo. Explica.

Realiza tus cálculos



Explicación ▸

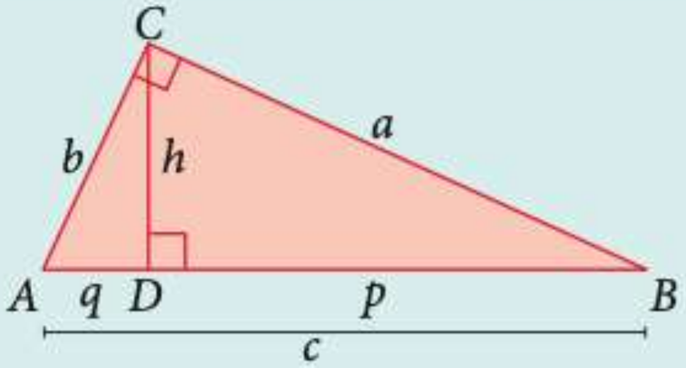
- ¿Qué relación hay entre las áreas de los cuadrados? ¿Encuentras una relación entre p, q y h? Justifica tu respuesta.

DEFINICIÓN

En el ΔABC, rectángulo en C, la altura desde el vértice C interseca al lado $\overline{AB}$ en un punto D, formando dos nuevos triángulos rectángulos ΔACD y ΔCBD. En estos triángulos, es posible establecer la siguiente relación:

$\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$

A partir de lo anterior, es posible expresar los **teoremas de Euclides**:



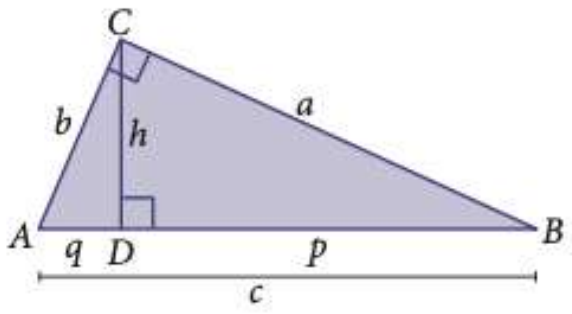
$$\left.\begin{aligned} a^2 &= c \cdot p \\ b^2 &= c \cdot q \end{aligned}\right] \rightarrow \text{Referentes a los catetos.}$$

$$h^2 = p \cdot q \rightarrow \text{Referente a la altura.}$$

EJEMPLO 1

Si se sabe que $\Delta ABC \sim \Delta CBD$, demuestra que en el ΔABC se cumple la igualdad $a^2 = c \cdot p$.

1 Sabiendo que $\Delta ABC \sim \Delta CBD$, se tiene la siguiente proporción entre la medida de sus lados correspondientes.



$$\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

2 Remplazando las medidas de sus lados en la igualdad $\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BD}$, se tiene:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{p} \blacktriangleright a^2 = c \cdot p$$

3 Por lo tanto, en el ΔABC se cumple que $a^2 = c \cdot p$.

¿Qué criterio de semejanza te permite demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta CBD$? Justifica tu afirmación.

EJEMPLO2

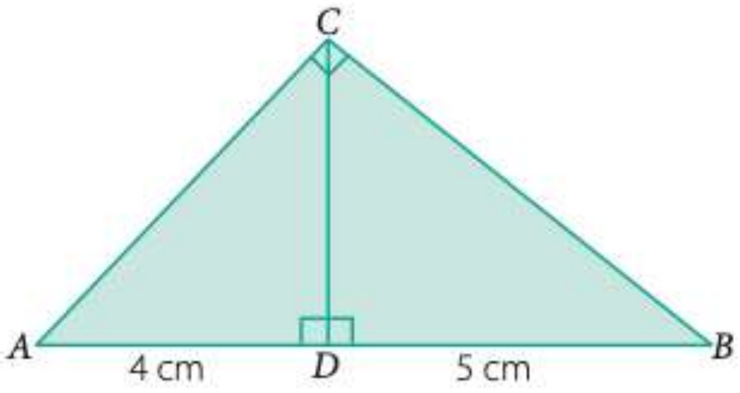
El ΔABC es rectángulo en C. ¿Cuál es la medida de los lados $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$?

Al utilizar el teorema de Euclides referente a los catetos, se tiene que:

$CA^2 = 4 \cdot 9$ $\qquad$ $BC^2 = 5 \cdot 9$

$CA^2 = 36 \; / \sqrt{\;}$ $\qquad$ $BC^2 = 45 \; / \sqrt{\;}$

$CA = 6$ $\qquad$ $BC = \sqrt{45}$



Respuesta: La medida de los lados $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$ son 6 cm y $\sqrt{45}$ cm, respectivamente.

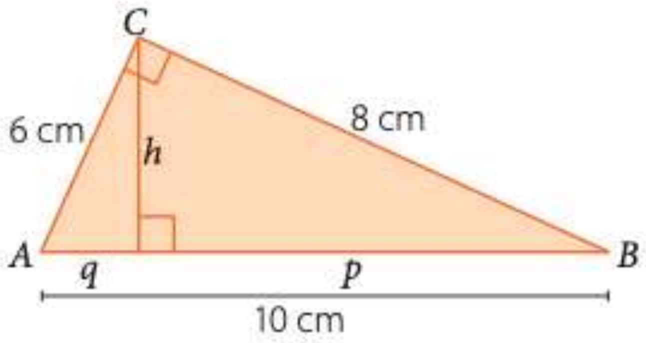
¿Cuánto mide el segmento $\overline{CD}$?

EJEMPLO 3

El ΔABC es rectángulo en C. ¿Cuáles son los valores de p, q y h?

Al utilizar el teorema de Euclides referente a los catetos, se tiene que:

$8^2 = p \cdot 10$ ▸ $p = 6,4$ $\quad$ $6^2 = q \cdot 10$ ▸ $q = 3,6$



Utilizando las medidas de p y q se calculará la medida de h.

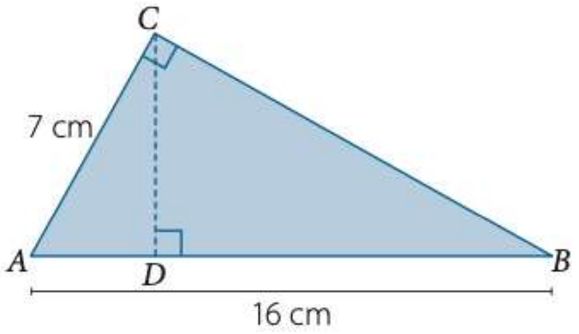
$h^2 = 3,6 \cdot 6,4$ ▸ $h^2 = 23,04$ ▸ $h = 4,8$

Respuesta: Las medidas de p, q y h son 6,4 cm, 3,6 cm y 4,8 cm, respectivamente.

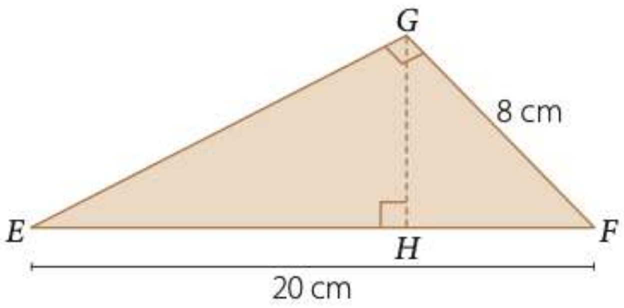
EJERCICIOS

1. Utiliza los teoremas de Euclides y calcula lo solicitado.

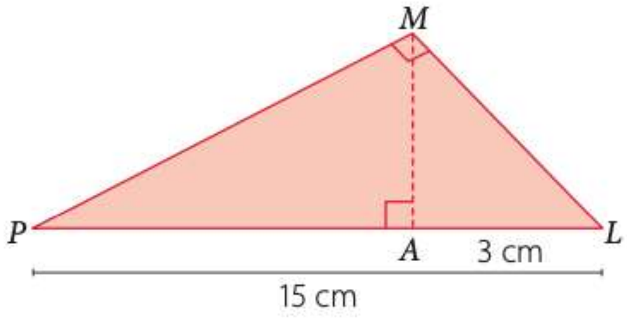
a. Calcula la medida de $\overline{AD}$.



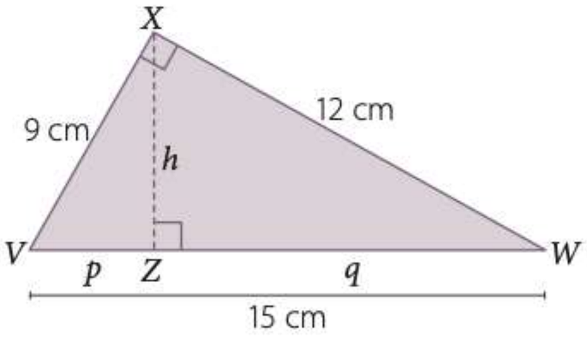
b. Calcula la medida de $\overline{HF}$.



c. Calcula la medida de $\overline{AM}$.

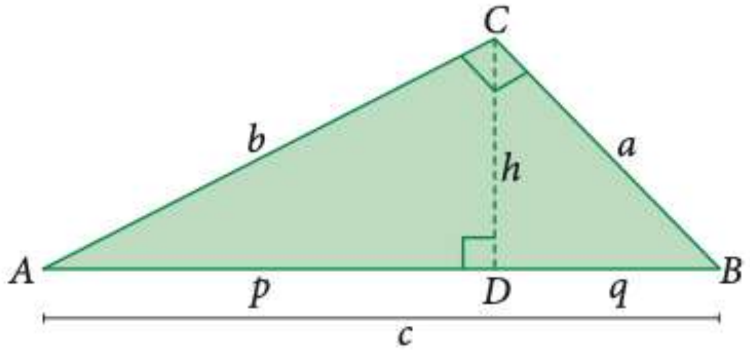


d. Calcula las medidas de p, q y h.



EJERCICIOS

2. Analiza el siguiente triángulo. Luego, responde.



a. Si $a = 8$ cm y $q = 2$ cm, ¿cuál es el valor de c?

b. Si $h = 9$ cm y $p = 4$ cm, ¿cuál es el valor de q?

c. Si $q = 5$ cm y $p = 10$ cm, ¿cuál es el valor de b?

d. Si $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 5$ cm, ¿cuál es el valor de p, q y h?

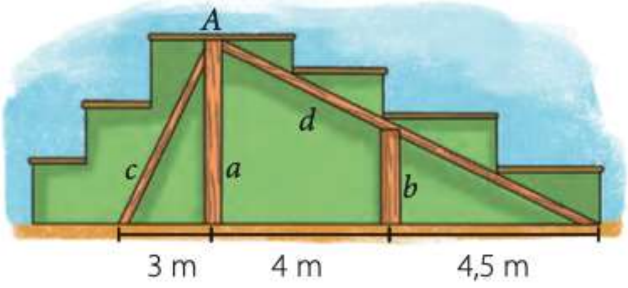
e. Si $h = \frac{60}{13}$ cm, $p = \frac{25}{13}$ cm y $q = \frac{144}{13}$ cm, ¿cuál es el valor de a, b y c?

f. Si $a = 8$ cm, $b = 15$ cm y $c = 17$ cm, ¿cuál es el valor de p, q y h?

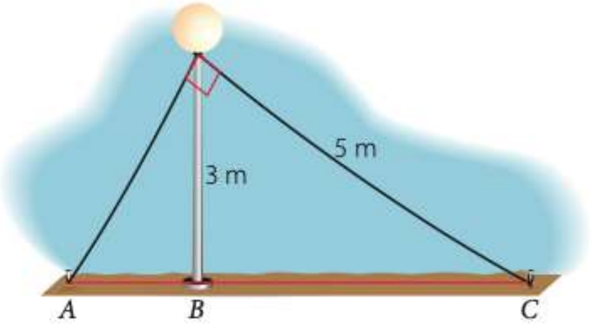
EJERCICIOS

3. **Resuelve los siguientes problemas.**

a. Para sostener los asientos de una tribuna, se han puesto por debajo las columnas a y b, y las vigas c y d. Si las vigas forman entre sí un ángulo recto, ¿cuál será la altura de cada columna?



b. Un poste se encuentra anclado mediante dos cables que forman un ángulo recto. ¿Cuáles son las medidas de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$? (Considera que el poste no tiene grosor).



EJERCICIOS

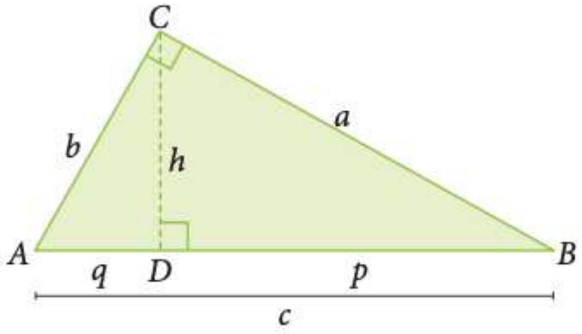
4. Demuestra que en el ΔABC se cumple que:

a. $b^2 = c \cdot q$

b. $h^2 = p \cdot q$

c. $a \cdot b = c \cdot h_c$

d. $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$



5. Junto con un compañero o una compañera expliquen quién está en lo correcto. Argumenten.

Juan le comenta a Melissa que las medidas escritas en el ΔACD no son correctas, ya que no cumplen con el teorema de Euclides, a lo que Melissa le responde que sí son correctas, ya que no se puede aplicar el teorema de Euclides. ¿Quién está en lo correcto?